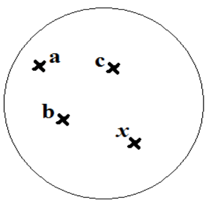
Le Un de Frege et le *Yadlun* de Lacan

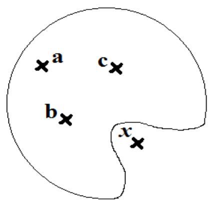
Dans la leçon du 10 mai du séminaire "...Ou Pire", Lacan revient sur la construction de la suite des nombres entiers pour souligner : "*Ce que je voudrais dire, c'est que, soustrait l'Un, tout cet édifice des nombres devrait, à l'entendre comme produit d'une opération logique, nommément celle qui procède de la définition du zéro et de celle du successeur, se défaire dans toute la chaîne, jusqu'à revenir à son point de départ*". Est ici clairement affirmée la différence fondamentale entre le 1 de Frege, qui fait partie de l'édifice des nombres, et le "Un" dont nous parle Lacan en lançant son "*Yadlun*", qui soutient l'édifice et sans lequel ce dernier se déferait.

C'est ce point que je voudrais essayer de déplier en repartant de la définition du successeur proposée par Frege dans Les Fondement de l'Arithmétique. On se souvient que dans ce texte, Frege propose des définitions fondées en logique des trois concepts considérés comme premiers par Peano pour construire la suite des nombres entiers. Ces trois concepts sont ceux de nombre, de zéro, et de successeur.
Pour résumer :
Le nombre est défini comme l'extension du concept : "équinumérique à un concept donné" soit comme classe d'équivalence modulo la relation d'équinuméricité.
Le zéro est défini comme l'extension du concept : "équinumérique au concept : "non-identique à soi même""
Concernant le successeur, Frege écrit :
Je me propose maintenant de définir la relation qui affecte deux membres voisins de la suite naturelle des nombres. Posons que la proposition :
« il existe un concept F et un objet x qui tombe sous ce concept tels que le nombre cardinal qui appartient à ce concept est n et que le nombre cardinal qui appartient au concept : « qui tombe sous F mais n'est pas identique à x » est m
veut dire la même chose que :
« n suit immédiatement m dans la suite naturelle des nombres »

Qu'est-ce à dire ?
Dans un premier temps, Frege pose l'existence d'un concept F – que nous pouvons conformément à l'habitude, représenter comme un ensemble – sous lequel tombent un certain nombre d'objets : {*a, b, c*, ...*x* , ...}, parmi lesquels il distingue un certain *x* dont il est supposé qu'il existe. Comme tout concept, F possède un nombre appelé *n.*
Dans un deuxième temps, Frege définit le concept qu'il appelle G, à partir de l'énoncé en forme de fonction logique : "qui appartient à F mais n'est pas *x* ". Sous ce deuxième concept tombent les mêmes objets {*a, b, c*, ...}, à l'exception du *x* qui a été précédemment distingué dans F. Pour le dire brièvement, G, c'est F sans *x*, et il est alors tout naturel de poser comme le fait Frege que si le nombre assigné à G est m, n sera le successeur de m.



F a pour nombre n : successeur de m



G* a pour nombre *m

On voit ici clairement que dans cette définition du successeur, Frege procède en fait à la soustraction de *x* à F pour atteindre G. Il me semble légitime de soutenir que Frege définit non pas le successeur, mais le prédecesseur, même si du point de vue strictement logique, la distinction est sans importance.

La construction par Frege du 1 à partir du zéro se présente alors comme une pure application de la définition ci-dessus : Frege pose d'abord un concept, F à l'aide de la fonction logique : "identique à zéro"[1]. Sous ce concept tombe un objet au moins qui est zéro lui-même. Soit *x* cet objet.
On définit alors le concept G comme ci-dessus par la fonction : "qui appartient à F mais n'est pas identique à *x*", fonction qui dans le cas présent se formule : "qui est identique à zéro (parce que appartenant à F) mais n'est pas identique à zéro (parce que différent de *x*)". On tombe ainsi sur la définition de l'ensemble vide[2] dont le nombre est zéro. Par conséquent le nombre à assigner à G est le successeur de zéro, c'est à dire 1.

Concept (ensemble)	F	G	F : "identique à 0"	G : "identique à 0, mais non-identique à 0"
éléments	a, b, c, ...*x*, ...	a, b, c...mais pas *x*	0	aucun élément
nombre	*n*:successeur de *m*	*m*	1	0

Là encore, on voit clairement que c'est du passage du 1 au zéro qu'il est question, et que ce passage s'opère par soustraction d'un *x* qui a d'abord été repéré comme faisant partie de G.

C'est en ce point que, me semble-t-il il convient d'insister sur ce qui fait le coeur de la définition proposée par Frege, à savoir la possibilité affirmée de pouvoir en toute circonstance "extraire" un certain *x* d'un ensemble (Frege dit un concept) par ailleurs bien défini. Il me semble que le Un dont parle Lacan dans son "*Yadlun*", a le plus grand rapport avec cet *x* dont Frege postule qu'il existe toujours[3]. On voit bien aussi pourquoi Lacan peut parler de l'édifice des nombres entiers comme pouvant se défaire jusqu'à son point de départ, si cette possibilité de soustraire un *x* se dérobait. Il y a bien une fonction de l'Un qui est un préalable nécessaire à la construction du nombre 1 de Frege, à savoir cette capacité à extraire, à élire un élément donné parmi les éléments d'un ensemble.

Les logiciens se sont très tôt aperçus du fait que cette possibilité n'était ni évidente[4], ni déductible des axiomes de la théorie des ensembles, et qu'il convenait en ce point de former un axiome spécifique. Cet axiome a été désigné du nom *d'axiome de choix* et possède un longue histoire, qu'il n'est pas question de résumer ici. On se contentera de deux remarques concernant cet axiome :

- C'est Zermelo, en 1904 qui l'a formulé pour la première fois, en soulignant sa nécessité pour démontrer que tout ensemble pouvait être bien ordonné. L'axiome de choix est donc intimement lié à la question du bon ordre.
- Le fait d'accepter ou non l'axiome de choix fait partie des points qui séparent les classiques, qui l'acceptent, et les intuitionnistes, comme Brouwer qui le rejettent. Lacan, à bien des égard se révèle proche des intuitionnistes.

Il me semble légitime de considérer que le *Yadlun* de Lacan, dont il nous invite à nous étonner, est bien une sorte de reformulation de l'axiome de choix : sans cette possibilité de choisir, d'élire un représentant parmi les éléments d'un ensemble, pas de suite des entiers, pas de bon ordre possible, non plus.
Mais cette possibilité d'élire, nous pouvons lui donner son nom : pour nous, ils s'agit de ce qui rend possible toute symbolisation, de la symbolisation primordiale que Freud désigne comme la

1 Rappelons qu'à ce stade le zéro est déja bien défini.
2 à savoir la fonction "différent de lui-même"
3 Sauf, bien sûr, par hypothèse, dans l'ensemble vide.
4 Contrairement aux apparences : pour un ensemble fini, on est tenté de dire : il suffit de prendre un élément, n'importe lequel. La question est comment le prendre, c'est à dire comment le désigner, comment en jouir ? la difficulté se redouble lorsqu'il sagit d'ensembles infinis, discrets ou continus.

Bejahung : sur le chemin qui va de la perception à la conscience, il y a cette nécesaire opération de jugement : d'attribution, puis d'existence, qui comporte un "je prends" correspondant à la mise en oeuvre non plus d'un axiome, mais d'un acte vectorisé par le principe de plaisir, et contemporain de la naissance d'un sujet.

C'est à mon sens ce qui explique aussi bien l'intérêt de Lacan pour l'élaboration de Frege que la nécessité qui est la sienne de lui apporter un complément, une rectification qui y réintroduise ce qui en a été forclos : un sujet. le *Yadlun* illustre à ce titre la remarque de Lacan, lorsqu'il souligne le fait que nous retrouvons dans les impasses de la logique les mêmes impasses que celles qu'exprimele "Il n'y a pas de rapport sexuel".