**Trois points c'est tout !**

« L'éternité c'est long, surtout sur la fin… »
Woody Allen

L'égalité 0,999… = 1 et sa preuve algébrique auraient des effets de sidération sur son lecteur/auditeur (spectateur ?) ?
Rien de spectaculaire en fait puisque, pour reprendre la démonstration (monstration), en posant $x = 0{,}999\ldots$ et en considérant que, nécessairement, $10x = 9{,}999\ldots$ on obtient que :
$10x - x = 9x = 9$ et que, par conséquent, $x = 1$ !
D'où viendrait donc cette impression de tour de passe-passe algébrique qui aurait pour éventuel objectif de tromper le *spectateur* incrédule (!) bien persuadé que 0,999… et 1 ne sont pas égaux ?
Pour enfoncer le clou, commençons par nous poser la question de savoir ce qui permet de distinguer deux nombres réels : si deux nombres réels sont différents on peut toujours en trouver un autre qui s'intercale entre les deux précédents ; ceci est parfaitement clair !
Autrement dit, par contraposition : si on ne peut intercaler un nombre entre deux autres c'est que ces deux derniers sont égaux !
Pour tous réels x,y $(x \neq y)$ ➔ (il existe (au moins) un réel z tel que $x < z < y$ ou $y < z < x$)
Ceci traduit la propriété de densité des nombres réels. (1)

Essayez donc maintenant d'intercaler un nombre entre 0,999…et 1 ! Bonne chance !...
Sommes nous maintenant bien convaincus qu'il s'agit des deux mêmes nombres ?
Ça devrait !...
C'est bizarre, quand nous avons *écrit* $x = 0{,}999\ldots$ nous avons mis un signe d'égalité entre la lettre x et le nombre 0,999… cela n'a pas posé tant de problèmes que cela – sans doute qu'une certaine éducation algébrique héritée de l'Histoire des mathématiques nous y a habitués - et pourtant, quoi de plus différent que cette lettre « x » et ce nombre 0,999… ça ne s'écrit pas vraiment dans le même registre ! Ces signes n'opèrent pas – a priori – dans le même champ !

Il faudrait se rappeler que dans la Grèce présocratique l'égalité $\alpha = \beta$ posait déjà des questions métaphysiques à certains philosophes soucieux à l'extrême d'établir des vérités indubitables !
Nous serions donc davantage « surpris » de voir écrit 0,999…= 1 !
Risquons une hypothèse : Sommes nous bien convaincus que les trois petits points de l'écriture 0,999… signifient que tous les 9 de la partie décimale sont écrits ?
Ils y sont tous ! Sans exception !
Ne considérerions-nous pas plutôt qu'ils n'y sont que *potentiellement* ? Il suffirait de prendre un peu de temps (!) et de les écrire les uns à la suite des autres ! Les uns à la suite des autres ?
Mais il n'y a plus rien à écrire ! En imaginant pouvoir *continuer* écrire des 9 on fait comme si on pouvait intercaler un nombre encore plus grand que le précédent et pas encore égal à 1, d'où la confusion ! On rejoue « Achille et la Tortue » !
Mathématiquement : l'écriture 0,999… vaut pour une *limite* de suite : il s'agit bien donc d'infini actuel et non potentiel. « 1 » est l'actualisation de la suite et les trois petits points ne sont pas une vague allitération qui prendrait fin un moment donné faute de combattants !
La lecture dynamique des trois petits points induit une appréhension « *potentialiste »* de l'infini qui n'a, en fait, pas sa place ici puisque l'infini y est en acte ! Seule une lecture statique est valide.
On a imaginé que 0,999… possédait un successeur et que le nombre 1 faisait figure d'horizon !
Eh non ! « 0,999… » c'est tout « 1 » !!!... (2)

Thierry Berkover (juin 2008)

(1) Cette propriété de densité vaut également pour les nombres décimaux et rationnels.
(2) Ces trois petits points ne sont pas une limite à l'imagination !