ALI
Mathinées lacaniennes

2 Février 08

Atelier de Topologie *5*
Henri Cesbron-Lavau

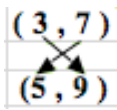
Nous allons continuer notre — le mot qui me vient c'est *jeu* : après tout, pourquoi le mathématicien passe-t-il tant de temps avec les lettres, sinon parce que quelque part il y a un jeu ? Jeu qui d'ailleurs se trouve peut-être lui-même joué par les lettres... C'est la question qui est en filigrane de ce travail, et de celui de tout mathématicien.
La fois dernière nous avions vu comment on peut faire des soustractions sans signe - (*moins*). C'est-à-dire que partant des entiers qu'on dit naturels, entiers qu'on pensait jusqu'à une certaine époque avoir été donnés par une divinité, en partant donc des entiers naturels, $\mathbb{N}$, ce que nous avons construits ce sont les entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Et aujourd'hui je vais reprendre la question des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ pour déboucher sur la notion de coupure. C'est-à-dire évoquer comment les mathématiciens construisent les coupures, et essayer d'en articuler quelque chose pour la psychanalyse puisque la coupure est vraiment — non pas essentielle puisque justement elle n'a pas de rapport à l'essence — mais une notion qui est d'une très grande importance dans le travail de l'inconscient.

Alors, au lieu de prendre un seul nombre l'idée c'est d'en prendre deux, deux entiers naturels, (a,b) et (c,d) et de les associer dans une dyade de manière à pouvoir éventuellement les regrouper. Qu'avions nous adopté comme règle l'autre fois ? Je vous la rappelle, c'est l'addition croisée :

(a,b) et (c,d) appartiennent à la même classe si et seulement si a+d= b+c

Si cette égalité est vérifiée, nos deux nombres appartiennent à la même classe et cette classe est appelée un nombre du nouvel espace, celui des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$. C'est-à-dire des entiers dont la somme de la dyade peut faire zéro. Quand vous prenez les entiers naturels, la somme de deux entiers (sauf si c'est zéro) ça ne fait jamais zéro. Mais si vous prenez deux entiers relatifs, leur somme peut faire zéro, peut appartenir à la classe (0,0). Et vous vous souvenez que (3,3) et (5,5), par exemple, appartiennent à la même classe puisque la somme croisée 3+5 et 5+3 donne une égalité, et le représentant canonique de cette classe c'est (0,0).

Ou prenons par exemple (3,7) et (5,9) :



3+9 =12 et 7+5 = 12. Ce sont donc un seul et même « nombre », c'est-à-dire qu'ils sont de la même classe.

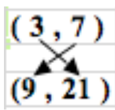
Je fais ce rappel car je vais reprendre ce principe pour le nouvel espace que nous allons étudier aujourd'hui. Nous avions vu que nous pouvions effectuer des opérations entre classes, c'est-à-dire définir une addition et que le résultat de cette addition était indépendant des dyades que nous prenions en compte. Autrement dit on a la classe, dans laquelle il y a des représentants, dont un est dit **canonique**, celui qui à un 0 à gauche ou à droite ou des deux côtés, et si nous faisons des opérations, le résultat va toujours nous donner des nombres qui restent dans la même classe. On définit bien des opérations entre classes.

Cette démarche qu'on a faite en associant à la dyade une opération, une opération d'addition, elle procure tellement de plaisir aux mathématiciens qu'ils vont la refaire en associant à une dyade une autre opération. Et ça va nous donner **l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.**
Les nombres rationnels sont des nombres qui relèvent d'une ratio, d'un rapport : c'est le rapport de deux nombres entiers relatifs. Il y a une ratio, c'est-à-dire qu'il y a un élément qui répété plusieurs fois va nous permettre de construire le nombre. Autrement dit il y a une unité de mesure qui répétée plusieurs fois va nous amener exactement à la valeur du nombre.
Si c'est en centimètres, par exemple 43cm, on prendra un centimètre et on le reportera 43 fois. Si c'est 43,7 cm, on prendra le millimètre et on le reportera 437 fois. Il suffit pour un nombre rationnel, quelle qu'en soit la précision, de prendre un élément unitaire suffisamment petit et de le répéter un nombre fini de fois.

Voyons cette construction des nombres rationnels qui va s'établir par-dessus, en une étape supplémentaire, par-dessus la construction des nombres relatifs $\mathbb{Z}$.
Prenons deux dyades, formées de deux entiers, et cette fois-ci puisque nous avons les avons construits, prenons des dyades d'entiers relatifs : (a,b) et (c,d).
Ces deux dyades nous allons les réunir dans une même classe si et seulement si une certaine relation est vérifiée entre les quatre composantes des dyades. Si cette relation est vérifiée, alors on dira qu'ils appartiennent à la même classe.
Vous souvenez que Norbert A'Campo nous avait présenté cette relation et qu'il s'était appuyé dessus pour faire la construction géométrique des nombres réels. Et il nous avait dit : « surtout ne faites pas ce que vous avez appris à l'école ».
Nous avons à représenter un rapport, c'est-à-dire une division : la construction que font les mathématiciens pour établir l'appartenance à la même classe, c'est une opération qui justement ne fait pas intervenir la division. De même que dans les entiers relatifs nous n'avions pas fait intervenir la soustraction mais l'addition, ici nous allons ne faire intervenir que la multiplication., et on dira que

(a,b) et (c,d) appartiennent à la même classe si et seulement si a$\times$d= b$\times$c

Autrement dit cette fois-ci ce n'est pas une addition croisée, c'est une multiplication croisée de deux entiers relatifs.
Quelques exemples :
(3,7) et (9,21)



Soit 3 x 21= 63 et 7 x 9 = 63
Donc (3,7) et (9,21) appartiennent à la même classe.

Prenons maintenant (3,8) et (12,33) :
3 x 33 = 99 et 8 x 12 = 96 Donc (3,8) et (12,33) n'appartiennent pas à la même classe.

Définir des classes n'a d'intérêt que si on peut en faire quelque chose. La question qui se pose est donc est-ce qu'on peut définir, par exemple, une multiplication entre classes ?

On va prendre par exemple la classe $\dot{(3,7)}$ et de la classe $\dot{(3,8)}$ avec certains autres représentants de leurs classes respectives :

$\dot{(3,7)}$	$\dot{(3,8)}$
(9 , 21)	**(12 , 32)**
...	**...**

La question est la suivante : est-ce que avec tous ces nombres qui appartiennent chacun à la même classe et qui vérifient entre eux la relation **a**x**d= b**x**c** (représentés ici dans une colonne) je peux faire une opération entre classes qui ne dépend pas du choix d**e** la dyade dans la classe ?

Je vais essayer de dire quelque chose du côté de l'analyse par rapport à ça. Par exemple, le démarrage d'une analyse. Le début d'une analyse, les premières séances, vous savez bien que ça peut commencer n'importe où : dans l'histoire du sujet ça peut commencer par quelque chose qui vient de se produire, par quelque chose qui est un souvenir plus ancien, ou par des questions qui ne sont pas encore suffisamment élaborées pour que la notion même d'histoire ait un repérage pour le sujet. C'est-à-dire que le travail que nous faisons, c'est un travail qui est en rapport avec la structure du sujet, et cette structure — on va mieux se le représenter par la suite avec les surfaces topologiques — on peut l'aborder à partir de n'importe quel point. Ce qui importe ce sont les parcours que vous allez faire, ou ne pas faire, sur ces structures. Alors cette notion de « par n'importe quel point », c'est que vous pouvez explorer le tore ou le cross-cap à partir de n'importe quel point, et vous allez faire des trajets.

Ici, bien qu'il s'agisse d'écriture on peut aussi articuler cela : l'opération entre classes on va pouvoir l'établir en partant de n'importe quel point à l'intérieur de la classe. Ce qui importe c'est qu'il y ait structure. Il nous faut donc d'abord définir ce que va être une opération entre classes.
Eh bien, la multiplication d'une classe $\dot{(a,b)}$ par une classe $\dot{(a',b')}$, c'est-à-dire de n'importe quel représentant de chaque classe, ça va être la dyade (axa', bxb'). C'est ainsi que je définis la multiplication entre classes :

$$\dot{(a,\, b)}\ \dot{\times}\ \dot{(a',\, b')} = (\, a \times a',\, b \times b')$$

Je peux même mettre un point sur le signe de la multiplication pour bien marquer qu'il s'agit d'une multiplication de classes. Vous voyez que la notion de nombre est transformée par un élément qui est une dyade, qui représente toutes les dyades qui appartiennent à une même classe.
La question est donc de savoir si le résultat de cette multiplication, **(axa', bxb'),** définit bien une classe. Les mathématiciens disent souvent « je pose », et puis il y a des choses posées qui

sont fécondes et d'autres pas. Ici, est-il fécond de définir une telle multiplication ? On va le vérifier par l'exemple, et ensuite on verra.
Alors, si je prends (3,7) et (3,8), j'applique l'opération :

$$(3,7) \text{ X } (3,8) = (9,56)$$

Que se passe-t-il si je prends un autre représentant ? Si je prends par exemple (9,21) et (12,32) :

$$(9,21) \text{ X } (12,32) = (108,672)$$

Et maintenant, qu'est-ce qu'on fait ? On sait que d'une part (3,7) et (9, 21) sont de la même classe, et que d'autre part (3,8) et (12, 32) sont aussi dans une même classe. Ce qui serait bien, c'est que (9,56) et (108,672) soient aussi dans une même classe. Et pour le vérifier on va faire la multiplication croisée :

$$\begin{array}{c} (9,56) \\ \times \\ (108,672) \end{array}$$

Ce qui fait donc 56 x 108 = 6048
Et 9 x 672 = 6048

Vous voyez donc que la définition de la multiplication entre classes est cohérente, dans la mesure où son résultat ne dépend pas du représentant de la classe choisi. Et ça définit donc bien une multiplication entre classes.
On peut le démontrer formellement, ce que je vais vous épargner.

- *Virginia Hasenbalg Deux remarques : d'abord tu définis donc un espace à partir du type de nombre que tu utilises. Le terme espace me surprend, on verra où il va nous mener. Et la deuxième remarque c'est qu'à l'intérieur d'une classe, on va opérer de façon croisée, mais pour créer une autre classe qui serait le résultat de l'opération, tu ne croises pas.*

La notion d'espace : c'est vrai qu'on pense en général plutôt à l'étendue de Kant, mais l'espace pour un mathématicien c'est en fait le synonyme d'ensemble. Ça ne fait pas forcément référence à une géométrie : c'est tellement vrai que rappelez-vous que Norbert A'Campo l'autre fois nous a déployé une construction des nombres réels par la géométrie. Là on peut saisir que les nombres réels sont dans un espace. La définition d'un espace c'est d'ailleurs un ensemble de points — on pourrait aussi bien dire un ensemble de lettres. Avec en plus des notions de voisinage, mais qui viennent s'ajouter...

- *C'est un lieu ?*

Oui, mais le lieu on a l'habitude de le repérer sur une carte ou sur une feuille. C'est-à-dire que ce lieu il a à ce moment-là déjà d'autres propriétés : le voisinage, la continuité, qui sont apportés par la feuille. Mais la notion d'espace préalable à sa représentation sur papier, au départ c'est un ensemble de points.

- *Lacan le dit dans le séminaire D'un discours qui ne serait pas du semblant : on va dans l'espace avec des lettres, grâce aux lettres...*

S'il n'y avait pas les équations de la physique, à commencer par la gravité, l'attraction entre deux masses qui est proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance :

$$F_{grav} \sim \frac{m_1 * m_2}{d^2}$$

effectivement on n'irait pas dans l'espace. C'est le b a ba de l'astronomie. Avec les lettres on atteint quelque chose du réel, à partir de l'écriture.
Alors, cette écriture est mathématique dans la mesure où il y a une cohérence. C'est aussi vrai dans la poésie, où certains poèmes — un peu extrêmes — sont pratiquement considérés comme mathématiques, des rimes se trouvant déposées d'une manière qui est organisée par un paradigme.

Revenons donc à notre multiplication : elle a été établie entre les classes indépendamment de leurs représentants.
On peut définir aussi l'addition entre deux classes — opération un peu plus compliquée, mais je voudrais passer à l'étage supérieur si vous n'avez pas de questions supplémentaires...

- *Ne pourrait-on pas plutôt dire que la classe a été construite à partir de représentants, ceux-ci ne jouant pas un rôle précis. Car on a quand même besoin de quatre lettres pour définir une classe, et si on supprime les lettres il n'y a plus de classe... On est obligatoirement obligés de passer par des représentants.*

Oui, aucun représentant n'a un rôle plus important que les autres, mais effectivement on ne ferait pas de mathématiques sans nombres. Il faut qu'il y ait une existence. J'aurais pu partir de la liste totale des représentants, qui est infinie, puisque ce sont toutes les combinaisons de (3,7) qu'on peut obtenir en multipliant (3,7) par un même nombre, qu'il soit positif ou négatif.

- *C'est ce que les physiciens appellent « l'échelle » : dans un système donné on peut changer d'échelle mais ce qui compte c'est qu'il y ait toujours les mêmes relations entre les représentants.*

C'est cela.

- *Virginia Hasenbalg On a affaire à des chiffres et à des lettres et on parle de représentants. Est-ce que c'est le même nom qui est utilisé pour le chiffre qui est le représentant de la lettre, ou c'est la lettre qui représente tous les chiffres ?*

Quand j'écris $\dot{(3,7)}$, cette écriture représente toute la série obtenue en multipliant (3,7) par un entier relatif. Mais quand j'écris (a,b) ce n'est pas la même chose : cela représente n'importe lequel.

- *Si on prend un élément isolé, on ne peut rien dire.*

Tout à fait, si on prend un élément isolé, on ne peut rien dire : on a une dyade, mais pas une classe.

C'est une construction qui nous intéresse dans la mesure où c'est un classement de toutes les dyades formées de deux entiers relatifs.

- *Le représentant canonique, c'est 1 ou 0 ?*

Très bonne question. Vous vous souvenez que pour les entiers relatifs nous avions un représentant canonique, celui dont la lecture était la plus simple. Votre question arrive à point.
Dans les entiers relatifs, dans $\mathbb{Z}$, on avait par exemple (0,2) ou (2,0) qui étaient représentants canoniques puisqu'ils comportaient un 0.
Ici le représentant canonique ne fait pas intervenir le 1, qui est pourtant l'élément neutre de la multiplication, comme 0 était celui de l'addition. Le représentant canonique, suivant la même idée, cela va être le plus simple. Et quel est le plus simple ? La dyade la plus simple dans une classe, c'est celle dont les deux nombres sont les plus petits. En particulier ils sont tels qu'on ne peut pas diviser l'un des deux nombres par l'autre : ils sont premiers entre eux.
Dans nos exemples de tout à l'heure, (9,21) n'est pas le représentant canonique puisqu'il n'est pas le plus simple car on peut le diviser par 3, aussi bien 9 que 21.
Par contre (3,7) est canonique car non seulement ils sont premiers mais on ne peut pas les diviser entre eux. Pour (21,23) même si 21 n'est pas premier, 23 n'est pas divisible par 21, on dit alors que 21 et 23 sont premiers entre eux, et cela implique que (21,23) est représentant canonique.

Cette remarque nous amène à passer au point suivant. Nous avons vu :

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
Entiers naturels	**Nombres relatifs**	**Nombres rationnels**
1 2 3 4 ...	**(0 , 2)**	**(3 , 7)**
	(2 , 0)	**(21 , 23)**
	...	
	...	
	(a , b)	**(a , b)**
	(c , d)	**(c , d)**
	$\in$	$\in$
	même classe	**même classe**
	si	**si**
	a+d = b+c	**ad = bc**
	avec a, b, c, d	**avec a, b, c, d**
	$\in$	$\in$
	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$

Vous êtes sensibles à la similitude de la démarche. Et rien ne fait plus plaisir à un mathématicien que de voir qu'il a pu transporter une démarche d'un contexte dans un autre et trouver quelque chose de nouveau, de plus riche. Ce qui a été fait pour les entiers relatifs a été fait pour les entiers rationnels simplement en prenant une autre opération.
Et l'étape suivante, qu'est-ce que ça va être ? Les irrationnels...

Jusqu'à présent vous avez vu que chaque ensemble que nous avons construit est inclus dans le suivant : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Les entiers naturels c'est un peu l'ensemble des entiers relatifs : les entiers relatifs ce sont les naturels avec + ou -. Si vous ne prenez que les nombres où il y a + vous retrouvez les naturels.
De même, les entiers relatifs c'est un sous-ensemble des rationnels puisque ce sont tous les nombres pour lesquels vous aurez en deuxième composante 1. Si je prends (4,1) je peux montrer que c'est la même chose que 4 (pensez toujours que (4,1) ça veut dire la même chose que 4/1).

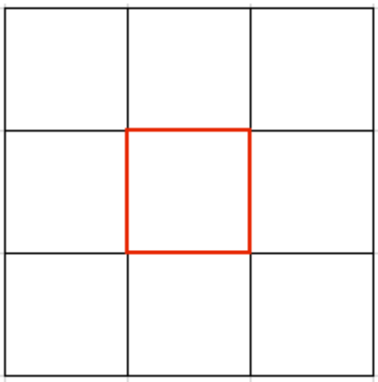
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
4	**(4, 0)**	**(4 , 1)**

- Virginia Hasenlbag Sur Internet la définition des ensembles est beaucoup plus simple. Ta façon de les définir à partir des dyades est une façon un peu spéciale...

Ce qu'on trouve dans les livres de vulgarisation, on ne peut pas travailler avec parce que la chose est posée comme étant déjà établie : c'est comme un livre qui expliquerait la lecture... à quelqu'un qui sait déjà lire : il y a un présupposé qui fait appel à l'entendement commun. Tandis que notre méthode est celle qui permet de construire en mathématique. De la même façon que les physiciens ont besoin d'une dimension du mètre qui soit assez précise pour les mesures qu'ils font. Pour vous donner une idée de la précision à laquelle ils arrivent, j'ai eu l'occasion de manipuler récemment un appareil qui mesure le mètre en faisant intervenir les forces de gravitation, et qui donne un résultat différent suivant qu'il est posé sur une table ou sous la table. Il est capable d'aller à des définitions très précises, qui sont en rapport avec l'objectif recherché. Et pour faire des mathématiques on a besoin d'une définition comme celle-ci.

Il me reste juste assez de temps pour ouvrir la question des nombres irrationnels, et simplement pour aujourd'hui je vais vous parler de √2 puis nous ferons une coupure...

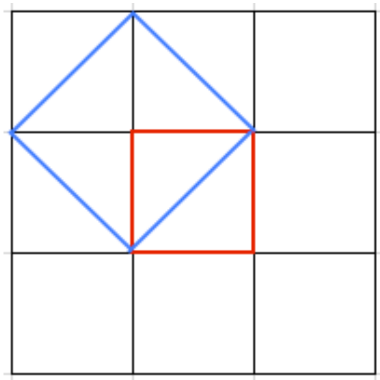
Si nous dessinons en rouge un carré, qui fait partie d'un carrelage, la question que se posaient les grecs déjà, c'était de savoir comment construire un carré dont la surface serait le double de celui de base, disons le double de celui dont le côté est 1.



Je ne peux que penser à l'exposé récent de Marcel Czermak qui parlait de l'impossibilité d'atteindre le 2. C'est exactement ce qui se produit ici. La question d'atteindre le 2, c'est dans

le fond combien de fois pourrait-il y avoir une partie de 1 qui puisse nous permettre de construire le 2. En arithmétique c'est tout simple, mais quand on passe par les surfaces ça n'a pas de solution. Et c'est ce que je vais montrer.
La question à la base de ce problème, c'est de savoir s'il y a un *Un*, ou un Dieu, qu'on puisse retrouver, qui soit à la base de l'univers. C'était la question philosophique sous-jacente qu'il y avait.

Je trace en bleu la diagonale de ce carré, et en bleu également celles des carrés voisins. Il faut faire la figure exacte, mais il faut se méfier aussi des figures trop exactes qui peuvent nous inciter à établir des propriétés en leur donnant un caractère général alors qu'elles sont très liées à la figure dessinée.
Je trace donc ces diagonales et j'obtiens une figure qui est un carré puisque les quatre côtés sont égaux : ils sont tous les diagonales de carrés égaux, de côté 1, les angles sont bien à 90°entre eux.



Que représente la surface définie par le triangle dans le carré central ? Elle représente la moitié d'un carré de côté 1.
Si j'y ajoute les 3 autres triangles, j'obtiens 4 fois la moitié de la surface du carré de départ, soit un carré dont la surface est le double du carré initial. Grâce à cette diagonale, à laquelle Pythagore s'est intéressé.
Ce que je vous montrerai la fois prochaine c'est en quoi cette diagonale n'est pas un nombre rationnel, ne peut pas être le rapport de deux entiers...

Qu'est ce que c'est que ce géomètre de l'univers qui construit les choses qui à un moment donné ne sont plus basées sur des entiers ? C'est là que ça nous ouvre à la coupure, que nous allons prendre tout de suite...

Transcription de Lucien Verchezer