ALI
Mathinées lacaniennes

19 Janvier 08

Atelier de Topologie *4*
Henri Cesbron-Lavau

Nous allons continuer le travail que nous avons entamé cette année et qui, au fil des exposés, apparaît être un travail sur l'usage des lettres. Ce que je souhaiterais, c'est que nous nous exercions ce matin à l'emploi des lettres, qui sont pour les mathématiques d'un usage assez ancien. Usage qui n'est pas apparu tout de suite mais dès qu'ont été utilisés des théorèmes, c'est-à-dire des énoncés qui pouvaient s'appliquer à différentes situations.

Dans le remarquable exposé que Norbert A'Campo a bien voulu nous faire en Décembre, l'un des ressorts de son exposition a été précisément de passer par un travail de la lettre. Il nous a parlé d'une géométrie des nombres rationnels à partir d'un certain usage de la lettre, c'est-à-dire d'une autre façon de disposer ces nombres. Il s'est situé entre quelque chose qui est plus simple et quelque chose qui est plus complexe. Un mot sur ce qui est plus complexe : c'est une construction qu'il a faite, et qui est exposée sur internet sur un site géré par l'Université et qui recueille les travaux des scientifiques actuels et que vous trouverez à l'adresse http://arxiv.org/abs/math/0301015. Vous y trouverez sur une dizaine de pages une construction des nombres réels qui est faite à partir des nombres rationnels en utilisant ces méthodes — c'est un travail de mathématicien pour des mathématiciens.

Alors je disais qu'il se situait entre quelque chose de plus difficile — ce qu'il a publié à cette adresse internet — et quelque chose de plus facile qui est ce dont je vais vous parler ce matin : nous allons voir comment les mathématiciens ont construit le signe **-** (*moins)*, sans utiliser le signe **-**, c'est-à-dire comment on peut écrire des nombres négatifs sans le signe **-**. Ce qui dans le temps suivant va nous amener à penser ce que c'est de mettre *moins.*
Comme vous le savez, la négation est l'un des premiers actes par lequel l'humain se différencie de l'animal. Au niveau du langage il dit : je ne veux pas. Ce *je ne veux pas*, il renvoie justement à un sujet qui va pouvoir porter cette négation. Et donc le nombre négatif lui aussi, si on faisait une histoire de l'utilisation des nombres au travers de quelques millénaires, marque l'accès à une nouvelle possibilité des nombres. Puisque, comme vous le savez, les nombres au départ étaient établis en une correspondance avec les doigts de la main, par exemple. D'où notre système décimal, et le fait que dans certaines civilisations le système est basé sur 20 car on compte aussi avec les doigts de pieds. Il s'agissait donc d'utiliser le nombre pour représenter quelque chose de visible, de réel. Qu'est-ce alors que ce moins ? Si je dis que sur la table il y a **-**4 crayons, je vais le dire par rapport à quoi ? Par rapport à une attente, et vous voyez donc que dans le chiffre négatif est déjà présent le désir, qui pointe...

Alors, comment les nombres négatifs ont-ils été construits ? — je devrais dire reconstruits parce qu'en général l'apparition d'un nouveau concept en mathématiques se fait d'abord par une intuition. Une intuition qu'on arrive à écrire. Il y a une intuition, il y a une écriture, et ensuite il y a un travail pour relier cette nouvelle écriture à ce qui est déjà connu : un travail d'assimilation, de réduction du trou par lequel est apparu ce nouveau concept. Moyennant

quoi la surface se retrouve non trouée et le mathématicien s'empresse d'aller chercher à la bordure un nouveau trou pour faire apparaître de nouveaux concepts — c'est le travail continu des mathématiques.
Cette présentation que je vais vous faire de ce qu'on appelle les **nombres relatifs**, c'est donc une écriture qui va comprendre à la fois les nombres positifs et les nombres négatifs et qui n'utilisera pas le signe **-**. En conséquence, ça nous amènera ensuite à nous poser la question de la lettre, dont nous avons fait un usage les fois précédentes et que je rappellerai.

Alors, on départ on a les nombres. Partons de notre système courant,

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

même si vous savez que ce n'est pas le seul utilisé aujourd'hui, et qu'il n'est pas le plus utilisé puisque toutes les machines qui nous entourent utilisent un système beaucoup plus simple qui n'est basé que sur le 0 et le 1. Mais nous ne sommes pas ces machines-là, et je vous propose de travailler avec ce dont nous avons l'habitude.

Ces chiffres que j'ai inscrit vont nous permettre d'écrire les nombres, par exemple :

0 101 1024

Nombres qu'on appelle des **entiers naturels,** et qui appartiennent à l'ensemble qu'on désigne de cette lettre : $\mathbb{N}$. Ces entiers naturels, c'est en soi un domaine des mathématiques le plus actuel : rien que sur les entiers naturels il y a des personnes qui y passent leur vie, il y a des théorèmes qui mettent trois siècles à être démontrés — et d'autres qui ne sont pas encore démontrés.
Pour la petite histoire, parmi les gens qui s'intéressent à ce domaine il y a les services de renseignements. Parce que c'est par ce type d'arithmétique qu'on chiffre les messages, sur Internet par exemple, et il y a des algorithmes qui vont transformer un message clair en un message incompréhensible. Seulement il faut que ce message puisse être compris de celui qui le reçoit, et il y a donc des algorithmes qui vont transformer le message incompréhensible en message clair, mais uniquement pour celui qui le reçoit.
Tous les mails, les conversations téléphoniques, les fax sont écoutés : ça passe par un système établi en Angleterre, le système Echelon, composé d'ordinateurs qui décryptent. Et si vous employez un certain nombre de mots — certains s'y étaient amusés : ils avaient envoyé de très nombreux messages en utilisant des mots comme *Al-Qaida, Bush, attentat*, ce qui a eu pour effet de saturer les ordinateurs. Ces services de renseignements financent des recherches scientifiques sur ces algorithmes-là : ce qui les intéresse c'est d'avoir un algorithme qui permette de chiffrer un message, d'être lu par celui qui le reçoit mais aussi par eux-mêmes. C'est d'ailleurs pourquoi une clef d'encodage qui dépasse une certaine puissance de chiffrement est considérée en France comme une arme de guerre et celui qui l'utiliserait serait passible de prison. Vous voyez les avatars de l'utilisation des lettres, et bizarrement comment un certain usage de la lettre nous revient en plein figure : car ce qui fonctionne là c'est toute la question qu'il y a autour du désir...

On va travailler sur de choses plus simples. Nous avons donc le groupe des entiers naturels, $\mathbb{N}$, qui vont jusqu'à l'infini. Et il y a deux groupes de mathématiciens — puisqu'on a eu l'occasion de parler de plusieurs mathématiciens qui ont travaillé sur l'infini — ceux qui disent : l'infini nous ne savons pas ce que c'est : nous ne pouvons connaître que le nombres que nous sommes capables de dire et par définition l'infini ne sera jamais atteint, et ceux qui disent que l'infini c'est une quantité à part, plus grande que les autres, et qu'on peut représenter par une lettre.

En tout cas, on a cette suite 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 qui se continue à l'infini. Alors, comment construire les nombres négatifs à l'aide de cette représentation et sans utiliser le signe **-** ? Le signe **-** on l'utilise tous les jours me direz-vous, alors pourquoi éviter de l'utiliser ? Parce que l'intérêt de la démarche que nous allons utiliser, c'est qu'elle s'applique ensuite à des quantités d'autres catégories de nombres, que nous connaissons ou que nous ne connaissons pas, soit parce que nous ne les avons jamais vus dans nos cours de maths, soit parce que nous les avons oubliés...
Á partir de chacun de ces nombres, je vais construire un couple. Par exemple :

(0,12)
(1,14)
(5,2)

Il ne s'agit pas de nombres décimaux : ce n'est pas 1,14, c'est un couple de deux nombres entiers : 1 et 14, ou 0 et 12.
J'écris donc maintenant quelque chose sous forme de deux nombres, et c'est sur cette association de deux nombres sur laquelle nous allons maintenant travailler.
En préparant cet atelier, m'est venu un rapprochement que je n'avais jamais fait avant mais qui est très simple : c'est celui de la comptabilité de la ménagère. C'est une comptabilité recettes-dépenses, à deux colonnes, comme les relevés de chèques : il y a ce qui rentre et ce qui sort. Reportons donc nos couples de nombres entiers dans chaque colonne du tableau :

On ajoute	On enlève
0	**12**
1	**14**
5	**2**

Je vais m'intéresser à ce dernier couple (5,2). Il y a ce qui arrive sur le compte : 5, et ce qui est enlevé du compte : 2. Il reste la même chose que s'il était rentré 6 et qu'il était sorti 3. Ou s'il était entré 1000 et sorti 997 :

On ajoute	On enlève
5	**2**
6	**3**
1000	**997**

Autrement dit, (5,2), (6,3), (1000,997) sont différentes manières d'écrire quelque chose dont le résultat est le même : à chaque fois il restera 3.
Comment construire un nombre à partir de cette écriture ? Dès qu'on a repéré que (5,2), (6,3), (1000,997) pour ne citer que ceux-là, dans notre démarche qui consiste à ne nous intéresser qu'au solde, c'est la même chose...
Il y a là un saut de lecture à faire et qui est le suivant : c'est de considérer que toutes ces écritures sont les écritures d'un même nombre. Autrement dit, tous les nombres tels que la différence — et je ne parle de différence que parce que nous la connaissons : ce qu'on va construire c'est sans la soustraction. Je ne me sers de ce terme que pour soutenir votre intuition. Toutes ces écritures vont donc être des écritures d'un même et unique nombre, et

dans toutes ces écritures, et il y en a beaucoup d'autres possibles que ces trois que j'ai inscrit, il y en a une qui est un peu privilégiée, qui est plus lisible : c'est (3,0).
Si vous écrivez (3,0), c'est beaucoup plus parlant parce que vous le voyez le 3. L'opération ne se fait plus que d'un seul côté : on a simplement déposé 3 sur le compte de la ménagère.

- *Question Est-ce que (3,0) c'est la même chose que (0,3) ?*

Votre question a trois minutes d'avance. Considérez pour l'instant que quand 3 est inscrit à gauche il va y avoir 3 qui reste, qu'on les a en plus sur le compte. L'ordre dans lequel c'est écrit est tout à fait important. Et ce (3,0) c'est le **représentant canonique** de toutes les écritures de cette classe.
Autrement dit, dans tous les couples de la forme (nombre, nombre) on va pouvoir faire des regroupements par **classes.**
Et c'est la classe qui devient le nombre. C'est un point fondamental : le nombre, nous avons tellement l'habitude de le lire que nous sommes collés aux chiffres, mais en fait le nombre est un objet. Et c'est un objet qui peut être porté par des écritures diverses. Et voilà donc une écriture, celle de (nombre, nombre), par paire, et que l'on peut regrouper en classes. Et c'est sur cette classe qu'on va construire notre nouvelle arithmétique.

Avant de venir à cette nouvelle arithmétique, parlons donc de ce (0,3). Dans quel cas ai-je (0,3) ? Eh bien, c'est dans le cas où on a rien mis en plus et où on a enlevé 3 :

On ajoute	On enlève
0	3

Ce nombre, qui s'écrit (0,3) correspond donc à quelque chose qui a été retiré du compte. C'est déjà l'écriture d'un potentiel, d'un nombre négatif écrit sans utiliser les signes + et **-**.

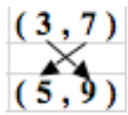
Pour construire une arithmétique, il faut qu'il y ait une cohérence : c'est-à-dire que la classe dont nous avons parlé, il faudrait que nous puissions la définir autrement que ce que je viens de faire par des images, images servant de support. L'imaginaire est nécessaire car on ne peut pas progresser sur un travail symbolique s'il n'y a pas de la chair... La construction, nous allons la faire sans utiliser le signe **-**, d'une manière qui est cohérente et qui va nous permettre de reposer ce qu'est une addition.

- *Mais vous avez posé d'emblée que la colonne de gauche c'était en plus, et la colonne de droite en moins...*

Je l'ai fait pour vous aider, pour vous permettre d'imaginariser. J'aurais d'ailleurs pu l'écrire comme sur votre compte bancaire : crédit et débit. Mais puisque c'est la direction vers laquelle vous me poussez, on, ne va plus l'utiliser.

Je prends des nombres : par exemple
(3,7) , (5,9)
La première chose qu'il faut définir, c'est notre classe. Quand va-t-on dire que deux nombres sont dans la même classe ? Eh bien nous l'avons vu il y a quelques minutes, c'est quand la différence est la même : mais le dire ainsi nous fait utiliser le signe **-.** On va retrouver la démarche que Norbert A'Campo a utilisé sur des nombres d'un niveau de complexité

supérieure : on peut se donner un moyen très simple pour dire que nos deux paires (3,7) et (5,9) sont le même nombre, c'est-à-dire appartiennent à la même classe. Cette opération simple qui va permettre de dire qu'il s'agit du même nombre, c'est **l'addition croisée :**



3 + 9 = 12
7 + 5 = 12

Voilà déjà un moyen simple qui va nous permettre de déterminer si deux paires appartiennent ou non à la même classe. Pour donner l'expression générale, on dira que

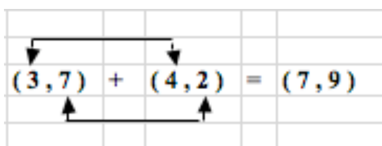
(a,b) et (a',b') sont dans la même classe si et seulement si a+b'= b+a'.

Donc ce moyen simple, avec quelque chose qu'on connaît déjà, l'addition, nous permet de regrouper des paires de nombres en classe. Et comme on l'a vu tout à l'heure, le représentant canonique de la classe, c'est celui dans lequel figure un 0. Dans l'exemple choisi, celui de nos deux paires (3,7) et (5,9) c'est donc (0,4).

Maintenant que nous avons nos classes, on va pouvoir se poser la question de l'addition de deux classes — puisque nos nombres maintenant ce sont les classes : c'est-à-dire que chaque nombre a maintenant une infinité d'écritures mais qui doivent donner le même résultat.

On a l'habitude d'écrire la classe de la manière suivante: $\dot{(0,4)}$, ce qui signifie toutes les paires qui appartiennent à la classe de (0,4). Et comme vous le savez, ce sont des nombres de la forme (a,b) tels que 0+b = 4+a. Il faut que l'addition croisée fonctionne. Dès que vous prenez une autre paire vous allez pouvoir déterminer si elle appartient à la classe en faisant cette petite opération d'addition croisée.
Le représentant canonique, celui qui s'écrit $\dot{(0,4)}$, représente dans cette écriture-là toutes les autres écritures potentielles : par exemple (3,7).

Autrement dit, on a fait un saut à partir de nos nombres 1 2 3, qu'on a mis par paires, puis toutes ces paires on les a regroupées par classes en utilisant le critère de l'addition croisée, et dorénavant le nombre sur lequel nous allons travailler c'est la classe. Mais ceci n'a d'intérêt que si nous sommes capables de définir une addition entre les classes. Puisque l'addition va porter sur nos nouveaux nombres. Nos nombres de départ (1 2 3, etc.) c'était l'arithmétique de base, mais les nombres auxquels nous sommes arrivés maintenant ce sont les classes. Maintenant nos nombres ce sont des paires de nombres positifs, et je définis des regroupements de ces paires en utilisant l'addition — pas de soustraction.
Puisque ces nombres d'un nouveau type sont ainsi dans des classes, l'étape suivante c'est de définir dessus des opérations. Et de se poser la question par exemple, si j'ai (3,7) + (4,2), ça donne quoi ? Comment additionne-t-on des paires de nombres ? Il faut se donner une règle, et le mathématicien dit : j'appelle addition de deux paires la paire qui est formée à gauche de l'addition des deux nombres qui sont à gauche, et à droite de l'addition des deux nombres de droites :



Cette définition de l'addition, qui concerne des classes, je l'ai appliqué ici à des représentants de classes, et j'obtiens comme résultat un représentant d'une classe. Et cette addition n'a de valeur que si elle est indifférente aux représentants de la classe.
Par exemple, on a (3,7). Si je prends (4,8), est-ce que ces deux paires, ces deux nombres appartiennent à la même classe ? J'applique l'addition croisée : 3+8 = 11 et 7+4 = 11. Ils sont donc bien dans la même classe.
Si je prends (5,3) et encore (4,2) : 5+2 = 7, et 3+4 = 7. Donc ils sont encore dans la même classe.
Je récapitule : on a (4,8) qui est de la même classe que (3,7)
Et (5,3) qui est de la même classe que (4,2)

Je peux faire l'addition de ces deux nombres (5,3) et (4,8) :

$$(5,3) + (4,8) = (9,11)$$

Par application j'obtiens donc une nouvelle paire (9,11) qui est la somme des deux autres. Quelle est la cohérence que je dois obtenir ? Á quelle condition ai-je obtenu une addition valable au niveau de la classe ? Á condition que (7,9) et (9,11) soient de la même classe. Est-ce le cas ? Vérifions :

$$\begin{array}{c}(7\,,\,9)\\(9\,,\,11)\end{array}$$

On a 7+11=18 et 9+9=18.

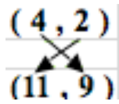
Partant de (3,7) et de (4,2) j'applique la définition de mon énoncé (a,b)+(c,d) = (a+c,b+d) et j'obtiens donc (7,9) comme on l'a vu plus haut.
Si je l'applique sur d'autres éléments de la classe, j'obtiens un autre élément qui est de la même classe que le premier résultat, c'est-à-dire que tous les résultats vont appartenir à la même classe : il s'agit donc bien d'une définition entre classes.

Vous voyez que l'objet mathématique ici n'est plus le nombre en tant qu'il est fait de chiffres : il est d'une autre écriture, qui peut prendre des formes diverses mais qu'on arrive à rassembler entre des classes, et c'est sur ces classes qu'on va faire des opérations.
Il y a par exemple un résultat intéressant qui est celui de trouver à un nombre donné son symétrique, c'est-à-dire un nombre tel que quand on l'ajoute à un autre on obtient zéro. Pour cela il faut d'abord définir le zéro :
Qu'est-ce que c'est que la classe 0 : (0,0) ? Ce sont toutes les paires telles que additionnés à (0,0) le résultat appartient à la même classe que (0,0).
Prenons par exemple (7,7) : appliquons l'addition croisée :

$$\begin{array}{c}(0\,,\,0)\\(7\,,\,7)\end{array}$$

On a 0+7 = 0+7, ils appartiennent donc à la même classe.

Pourquoi est-ce un « zéro de classe » ? Parce que si j'ajoute par exemple à (4,2) le nombre (7,7) : (4,2)+(7,7) = (11,9)
On s'aperçoit que (4,2) et (11,9) font partie de la même classe :



puisque 4+9 = 2+11
Autrement dit (4,2) + (7,7) ça donne (11,9) qui est toujours (4,2) quand on raisonne au niveau des classes, et leur représentant canonique à tous deux est la classe (2,0).
L'élément neutre de l'addition, celui qui représente le zéro, c'est donc n'importe quelle paire composée des mêmes nombres.

Maintenant, pour reprendre l'exemple du début, si je mets 2€ sur le compte et que je retire 2€ ça fait une opération blanche. Comment vais-je l'écrire ?
(2,0)+(0,2) = (2,2) qui est la même chose que notre zéro (0,0), ce que vous vérifiez par l'addition croisée.
Donc le nombre symétrique c'est celui qui est obtenu en permutant gauche et droite.

En déployant ceci nous avons dans un premier temps utilisé les signes de départ (0, 1, 2, 3, etc.) puis dans un deuxième temps des lettres (a, b, etc.) que nous avons associées dans une écriture, ce qui nous a permis de travailler sur des objets qui sont composés de plusieurs signes. Ces objets sont regroupés en classe, et les opérations que nous avons définies, nous les avons bien définies sur des classes puisqu'on a vu qu'elles étaient insensibles au représentant, au nombre que je prenais à l'intérieur de la classe.
De cette façon, de la même manière dont nous avons défini l'addition, on peut aussi définir la multiplication.

- *Le fait que vous soyez passé par les lettres, ça permet d'être moins sensible aux valeurs elles-mêmes.*

Exactement, c'est ça l'usage qui est fait en mathématique de la lettre. C'est-à-dire que d'une certaine façon la lettre a ici un statut paradoxal : d'une part elle va généraliser — elle va écrire, porter quelque chose qui est connu — et en même temps elle va opacifier, car quand j'écris a ou b, je ne sais plus quelle est la valeur de a. Néanmoins, en écrivant a et b d'une part et a' et b' de l'autre, je vais pouvoir articuler un rapport entre les deux : je vais dire

(a,b) = (a',b') si et seulement si a+b'=b+a'

Ces lettres vont renvoyer à une place et c'est là où vous pouvez lire que le signe -, puisqu'on a construit les nombres négatifs sans utiliser le signe -, quand on l'écrit on fait déjà de la topologie. C'est-à-dire qu'on écrit quelque chose qui indique une place.
Dans l'écriture que nous avons vue ce matin, 2 va s'écrire (2,0). Mais -2 comme nous l'avons vu va s'écrire (0,2). Le signe – (*moins*) veut dire changement de place. L'emploi de lettres et de la formule au-dessus, ça veut dire que si je prends ce qui est à cette place, à la place où j'ai écrit le a, et que j'ajoute ce que j'ai écrit à cette place, celle du b', j'obtiens un résultat. Et si je prends ce qui est à la place où j'ai écrit a' et que j'ajoute ce qui est à la place où j'ai écrit b, et si j'obtiens le même résultat, alors j'ai le même objet.

L'emploi des lettres nous a permis de renvoyer à des places. C'est un rapport entre des places.

- *Est-ce qu'on peut faire un parallèle avec l'inconscient : l'absence de négation, le zéro étant le trou et à l'intérieur de chaque classes on a la répétition...*

C'est vrai qu'on a réussi à écrire quelque chose qui va fonctionner comme un nombre négatif sans utiliser la négation. On a écrit (2,0) et quelque chose qui à jouté à cette paire va produire le zéro, (0,0). Quelque chose qui s'écrit sans faire apparaître de négation : simplement les places ont changées...

Transcription de Lucien Verchezer