ALI
Mathinées lacaniennes

6 octobre 07

Atelier de Topologie *1*
Henri Cesbron-Lavau

Cet atelier a pour but de vous faire acquérir les outils de base de la topologie de Lacan. L'emploi que Lacan a fait de la topologie a diffusé, pas seulement dans le champ analytique – probablement non pas auprès des mathématiciens professionnels, sauf peut-être quelques-uns dans la théorie des nœuds – mais aussi dans ce que l'honnête homme du XXI ème siècle a à savoir des mathématiques. Dans les rubriques de mathématiques, notamment sur Internet, on trouvera la topologie analytique, au sens mathématique, la topologie différentielle, et puis on trouvera aussi la topologie de Jacques Lacan. Ceci parce que Lacan a repéré dans la topologie un certain nombre d'écritures sur lesquelles il pouvait appuyer son discours – et pas sans en être étonné d'ailleurs, on aura l'occasion de le développer.

I La topologie triviale

Je voudrais démarrer par une topologie qu'on appelle **triviale**, la plus simple possible : la topologie du *tout* et du *vide*.
L'objectif est de savoir ce que c'est qu'une topologie, un espace topologique. Nous avons des représentations, nous voyons des surfaces, nous voyons éventuellement des nœuds, mais pour un mathématicien ce sont des objets imaginaires. La topologie, c'est d'abord une écriture et c'est à cette écriture que je voudrais vous introduire.

L'ensemble le plus simple – puisque la topologie est une structure qui va s'appliquer à un ensemble – c'est l'ensemble qui ne comporte rien, E = { ∅ }, soit l'ensemble vide.
Est-ce que je pourrais l'écrire comme ceci : E = { } puisque dans cet ensemble, il n'y a rien ? J'ai employé les termes de *vide* et de *rien*, mais cette écriture – ces 2 façons que j'ai eu d'écrire l'ensemble E – vous montrent que le vide ce n'est pas la même chose que le rien : le vide, ce n'est pas rien.

À partir de cet ensemble, on peut construire ce qu'on appelle l'ensemble des parties. Quelles sont les parties d'un ensemble dans lequel il n'y a rien ? Question que se posent les mathématiciens, question importante.
Eh bien, par définition, l'ensemble des parties de E, c'est l'ensemble de tous les sous-ensembles formés d'éléments de E : c'est-à-dire ici E lui-même et l'ensemble vide ∅. On l'écrit : P(E) = { E, ∅ }

Et même sur un ensemble aussi réduit, l'ensemble des parties de l'ensemble vide, on peut bâtir un **espace topologique**. Qu'est-ce que l'espace topologique ? C'est une famille : dans l'ensemble des parties, on dira qu'on a mis en place une topologie si on a distingué une famille de sous-ensembles qui vérifie 3 propriétés.

Dans un premier temps, c'est le travail de la topologie : écrire. Comprendre – ensuite on va y venir. Voici ces 3 propriétés :

1^e propriété : $E \in \sigma$ et $\varnothing \in \sigma$
L'ensemble dans sa totalité, E, et l'ensemble vide, $\varnothing$, appartiennent à cette famille (ici appelée σ)

2^e propriété : $E \cup \varnothing \in \sigma$
Si je réunis plusieurs sous ensembles de la famille, je reste toujours dans la famille. C'est-à-dire que l'union des sous-ensembles est aussi dans la famille
Cette propriété doit être vérifiée pour un nombre infini d'unions.

3^e propriété : $E \cap \varnothing \in \sigma$
Ce qui est commun à 2 sous-ensembles, l'intersection, appartient aussi à la famille.
Cette propriété doit être vérifiée pour tout nombre fini d'intersections.

Trois propriétés, et vous voyez qu'on est très loin de ce qu'on peut **imaginer** : c'est une écriture. Et cette écriture va nous permettre de construire des topologies sur des espaces qu'on n'imagine pas, ou qu'on ne peut imaginer. Le travail, justement, que Lacan a fait par rapport à Freud, c'est de sortir du spéculaire. Lacan est sorti du spéculaire, il est passé à une écriture.

Alors, pourquoi dans ce premier cas, très simple, celui de l'ensemble des parties de E, de $\sigma = \{ E, \varnothing \}$, on a bien une topologie ?
1^e propriété. D'abord parce que la première propriété est vérifiée : chacun des sous-ensembles, et dans la topologie triviale on les prend tous, c'est-à-dire ici en l'occurrence E et $\varnothing$, chacun appartient bien à cet ensemble.
$E \in \sigma$ et $\varnothing \in \sigma$

2^e propriété. Je fais l'union de E et de l'ensemble vide, $\varnothing$, c'est-à-dire de ce qui est dans l'un ou dans l'autre ou dans les deux. L'union, ça correspond à une sorte d'addition des ensembles (ça se différencie de l'addition habituelle mais cela a la même fonction), et l'ensemble vide $\varnothing$ est son zéro.
L'union de E et de $\varnothing$ est égale à E. $E \cup \varnothing = E$ On a donc
$E \cup \varnothing \in \sigma$

3^e propriété. Ce qui est commun à E et à l'ensemble vide $\varnothing$, c'est l'ensemble vide. Et chacun des deux, E et l'ensemble vide, appartient bien à la famille.
$E \cap \varnothing = \varnothing$, on a donc $E \cap \varnothing \in \sigma$

Donc ces propriétés ayant été vérifiées, ceci constitue bien une topologie de cet espace minimal, et cette famille, si je l'ai appelée σ, c'est pour se rappeler qu'en topologie c'est ce qu'on appelle des **ouverts**. Autrement dit, définir une topologie sur un ensemble, c'est définir quels sont les ouverts de cet ensemble.

- *Intervenante : Pourquoi ce terme d'« ouvert » ?*

Parce que, quand même, l'imaginaire soutient la pensée des mathématiciens. Et on le verra tout à l'heure, quand on va arriver à des choses plus concrètes... Là, j'ai simplement énoncé ce qui est le squelette, plus tard on donnera un peu de chair à tout ça – de la chair mathématique – et on verra l'ouvert...

Tout ceci était vraiment évident, banal, et on se demande pourquoi l'écrire. Mais prenons maintenant un ensemble dans lequel il y a quand même quelque chose, en plus de l'ensemble vide, un ensemble dans lequel il y a 3 éléments, les éléments a, b et c : $E = \{ a, b, c \}$.
Si je veux écrire une topologie, en reprenant le cas de la topologie triviale, je vais énumérer l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire la liste de tous les sous-ensembles de E :
Il y a E lui-même, car le mot partie n'est pas entendu au sens strict – comme se trouvant strictement à l'intérieur –: il est entendu comme à l'intérieur ou étant la même chose. Puis, on peut tous les écrire, ces sous-ensembles : celui qui est formés de 3 éléments, c'est-à-dire E, ceux qui sont formés de 2 éléments, ceux qui ont 1 seul élément, et celui qui n'en a aucun : l'ensemble vide.
$P(E) = \{ E, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing \}$
On a donc ici l'ensemble de toutes les parties de E.
En quoi est-ce que ceci vérifie la topologie ? Est-ce que prendre tous ces sous-ensembles constitue bien une famille d'ouverts, c'est-à-dire une famille de sous-ensembles qui vérifie les 3 propriétés ? On peut le regarder :

1^{e} propriété : E et l'ensemble vide $\varnothing$ doivent être dans la famille. Vérifions : ils le sont.

2^{e} propriété : l'union de 2 parties. Là, il y a beaucoup d'union de 2 parties possibles dans cette famille : par exemple l'union de a et de b, ça donne l'ensemble $\{a, b\}$ qui fait partie de la famille
$\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \in P(E)$
Pareil avec a et c et b et c.
C'est donc vérifié pour les éléments uniques. Est-ce que c'est vérifié, par exemple, pour $\{a,b\} \cup \{c\}$?
$\{a,b\} \cup \{c\} \in P(E)$, puisque $\{a,b\} \cup \{c\} = \{ a, b, c \}$ et que $\{ a, b, c \} = E$
Si je prends $\{a,b\} \cup \{a\}$, on a $\{a,b\} \cup \{a\} = \{a,b\}$, et $\{a,b\} \in P(E)$.
On vérifie tous les cas possibles, et cette deuxième propriété est vérifiée.

3^{e} propriété, pour l'intersection. Si je prends par exemple l'intersection de $\{a,b\}$ avec a : $\{a,b\} \cap \{a\} = \{a\}$ et $\{a\} \in P(E)$.
Idem si je prends l'intersection de $\{a,b\}$ et de $\{c\}$: $\{a,b\} \cap \{c\} = \varnothing$ et $\varnothing \in P(E)$.

Cette troisième propriété est donc aussi vérifiée.

La famille des sous-ensembles, de tous les sous-ensembles possibles de l'ensemble, constitue bien une topologie. Et c'est une topologie qui est dite **triviale** puisqu'elle fait intervenir tous les sous-ensembles.

<u>II La topologie non triviale</u>

Qu'est-ce que c'est qu'une topologie **non-triviale** ? Je vais continuer sur ce même exemple, E = { a, b, c }, et sur ce même ensemble nous allons construire une autre topologie.
Nous allons considérer la famille σ , dans laquelle nous allons mettre E et $\varnothing$ – nous y sommes obligés, c'est la première condition – et nous allons n'y rajouter que 3 éléments : $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{a,b\}$.
$\sigma = \{ E, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$
Est-ce que cette famille σ vérifie nos 3 propriétés ?

1^e^ propriété : E et l'ensemble vide $\varnothing$ doivent être des éléments de la famille.
Ils le sont.

2^e^ propriété : l'union de 2 parties. Par exemple $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$ et $\{a,b\} \in \sigma$.
Prenons $\{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\}$, donc toujours partie de σ. Vous pouvez en essayer d'autres, dans tous les cas on obtient un élément qui appartient à la famille.
Donc la deuxième propriété est vraie.

3^e^ propriété, pour l'intersection. $\{a,b\} \cap \{a= \{a\}$ et $\{a\} \in \sigma$
Ou bien $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$ et $\varnothing \in \sigma$. Toujours des éléments de la famille.
La troisième propriété est vérifiée.

Là c'est plus intéressant parce que tous les sous-ensembles de E ne sont pas dans cette famille des ouverts σ : par exemple $\{c\}$, $\{b,c\}$, $\{c,a\}$ n'y sont pas. Le $\{c\}$ est présent dans le E, mais il est exclu de toutes les intersections et il ne peut apparaître qu'accompagné par $\{a\}$ et $\{b\}$.

En tout cas, les 3 propriétés étant vérifiées, on a bien défini une famille d'ouverts et c'est cette famille d'ouverts qui confère à E une topologie.

- *J'ai une objection* : *ce n'est pas à E que ça confère une topologie, ça la confère à un sous-ensemble de E.*

Ça confère une topologie à E – qui est tel qu'il est donné : E = { a, b, c } – parce qu'à E j'adjoins quelque chose qui n'est pas donné au départ, qui n'est pas déjà dans E, j'adjoins une famille d'ouverts que j'écris comme ça :

$\sigma = \{ E, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$.

- *Mais ce n'est pas une adjonction, c'est une partition d'un sous-ensemble de E !*

Oui, absolument. Je choisis un sous-ensemble de E. Et c'est le fait de choisir un sous-ensemble de E qui apporte à E la topologie – que j'ai choisie par le fait que j'ai choisi ce sous-ensemble de E.

- *Il y a un glissement : vous attribuez à E la propriété d'un sous-ensemble.*

Nous sommes d'accords que σ n'est pas une partition complète de E, mais une partition d'un sous-ensemble de E. Et ce sous-ensemble de E, je l'ai choisi sans y mettre {c}. J'aurais pu choisir de ne pas y mettre {b} : c'est un choix. Vous admettez que je puisse faire ce choix ? Bien. Alors ce choix étant fait j'écris une partition de ce sous-ensemble. En fait, je ne suis même pas obligé d'écrire une partition de ce sous-ensemble : j'ai choisi de faire une partition d'un sous-ensemble, c'est-à-dire d'écrire une famille de sous-ensembles.
Le seul point important ce n'est pas le fait que ce soit une partition d'un sous-ensemble, c'est le fait que ce soit une famille de sous-ensembles.

Vous ne semblez toujours pas d'accord ? Alors, c'est qu'il y a effectivement un glissement pour vous, et je vais essayer de répondre.
Ce raisonnement que j'ai fait sur σ , avec les 3 propriétés, je l'ai fait sur la famille d'ouverts, vous êtes d'accord ?

- *Oui.*

Que cette famille d'ouverts soit une partition d'un sous-ensemble n'est pas le point, là, essentiel : ce qui est important c'est que ce soit une famille. De plus, j'ai bien vérifié que les 3 propriétés étaient vérifiées.
Donc à un ensemble de E, j'ai associé une famille de sous-ensembles vérifiant les 3 propriétés. C'est-à-dire qu'à l'intérieur de E il y a une famille, et que à l'intérieur de cette famille les 3 propriétés sont vraies. Et bien ceci confère une topologie à E. C'est la définition. Je vous suggère de l'accepter comme définition ou bien d'aller voir dans Bourbaki : la famille confère une topologie à E. Et en vertu de la première propriété, E fait partie de la famille.

- *Virginia Hasenbalg : Quand on n'est pas mathématicien, c'est une façon de bien voir la notion d'exclusion interne. On va faire des opérations avec E – E étant inclus dans les sous-ensembles, E étant dans E, sans qu'il soit écrit –, et ça permet de cerner quelque chose d'une exclusion qui est interne : on est dans une topologie lacanienne aussi.*

Là, on est dans une topologie mathématique aussi.

- *Intervenante : Tu ne l'as pas dit mais c'est probablement une différence entre la logique de classe et la logique des ensembles : tout ensemble inclut l'ensemble vide... Quand dans « D'un Autre à L'autre » Lacan appelle la faille dans l'Autre « l'ensemble vide » et non pas « zéro », et il prend soin d'expliquer pourquoi.*

Cette question de l’ensemble vide, pour nous dans le discours analytique, elle a à voir avec la castration de l’Autre, la faille dans le langage. Alors, pourquoi est-ce que tout ensemble inclut nécessairement l’ensemble vide ?

Qu’est-ce qu’un sous-ensemble ? Un sous-ensemble, c’est un ensemble qui contient 0, 1, plusieurs, ou tous les éléments d’un autre ensemble. Ça nous donne tous les sous-ensembles possibles – c’est ce qu’on appelle une partition. Et dans cette liste, il y a : « ne prendre aucun élément ». Un sous-ensemble peut ne contenir aucun élément : c’est ça l’ensemble vide.
Pour prolonger ta question : pourquoi l’ensemble vide, $\varnothing$, doit-il faire partie des ouverts ? Eh bien, parce qu’on a cherché à construire un objet, une topologie, qui puisse être utilisable : si on ne mettait pas d’ensemble vide, la troisième propriété ne pourrait pas être vérifiée, ou alors il n’y aurait qu’un seul élément.

- *Dans « D’un Autre à L’autre » Lacan dit qu’il n’utilise pas le 0, car pour l’utiliser il faudrait pouvoir disposer du nombre – sous-entendu : on ne sait pas compter au-delà de 2. Il se sert donc de l’ensemble vide comme il se sert du Un comme d’un signifiant et non comme d’un 1 comptable. Par exemple on peut penser que dans le Un support de l’identification, ce Un est un signifiant.*
L’inclusion de l’ensemble vide dans un ensemble pourrait-il tenir la place de SȺ ?

Pour répondre brièvement : Lacan à ce moment-là suit la démarche de Frege, et donc on va compter les écritures d’ensembles vides.

Je continue et nous reviendrons plus tard sur ces questions : aujourd’hui je voudrais faire court et dense.

Une chose à retenir, c’est donc que sur le même ensemble E, nous avons défini 2 topologies : une première topologie où étaient constitués comme ouverts la partition complète de E, et une deuxième topologie constituée ici par seulement certains sous-ensembles de E.
Si on n’a qu’une chose à retenir là, c’est que la topologie n’est pas induite par l’ensemble – elle n’est pas dans l’ensemble. C’est quelque chose qu’on ajoute : c’est une lecture de l’ensemble qui va lui conférer une topologie. Et donc un même ensemble peut être le support de plusieurs topologies ; ce qui est important puisque les *proximités* – la topologie va faire intervenir ensuite des notions comme celle du *voisinage* – ne seront pas les mêmes. Par exemple, s’il s’agissait d’un ensemble de points, ce n’est pas uniquement la distance métrique qui va dire qu’un point est proche d’un autre.

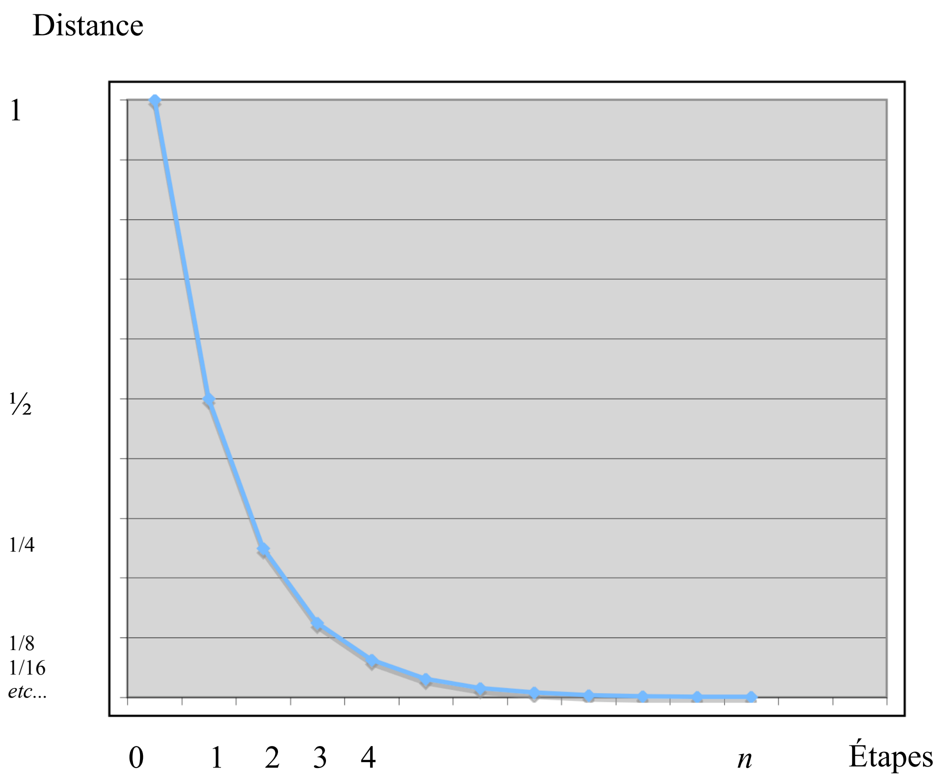
Les deux topologies que je viens de vous proposer sont donc d’abord la première la topologie triviale – celle où tous les sous-ensembles étaient considérés, tous les ouverts – et la seconde, la non triviale.
Ceci dit, c’est quand même une topologie qui est bâtie sur un ensemble fini : et une topologie, bâtie sur un ensemble fini ne va pas loin, elle est limitée. Là où ça devient intéressant c’est à partir du moment où il y a de l’infini.

- *Tu nous a dit que la topologie était une écriture. Et là tu y ajoutes la lecture...*

Une lecture, oui. Sur un ensemble, nous avons produit plusieurs écritures : l'écriture triviale, la non triviale, qui donnent lieux à plusieurs lectures.

III La question de l'infini.

Pour avancer avec la question de l'infini, nous allons parler du paradoxe d'Achille et de la tortue. Vous vous doutez bien d'ailleurs qu'il ne s'agit nullement d'un paradoxe : parce que si Achille va plus vite que la tortue, il y a bien un moment où il va la rattraper et la dépasser. Ce qui est paradoxal, c'est que ça a été développé par Zénon comme un paradoxe.
Comment l'écrirait-on aujourd'hui si on suit le raisonnement de Zénon ? Eh bien , il y a un certain nombre d'étapes, représentées sur l'axe horizontal, et à chaque étape Achille avance de son pas. Et on reporte sur l'axe vertical la distance qui lui reste à parcourir pour rattraper la tortue : à zéro il lui reste tout à parcourir, puis il avance et à chaque fois il va parcourir la moitié du chemin pour rattraper la tortue. Donc au début, il y a 1, c'est-à-dire toute la distance, puis ½ à l'étape suivante, puis ¼, etc. Vous avez donc une distance qui va décroître suivant cette courbe — sans que la ligne bleue ne vienne jamais exactement coïncider avec celle de l'axe (*ce qu'on a du mal à représenter sur le papier*).



Et le raisonnement de Zénon c'est de dire qu'Achille n'arrivera jamais au point où il devrait rencontrer la tortue, puisqu'à chaque étape il ne fait que la moitié de la distance qui les sépare.

1
A———————— T

1/2
A——— T

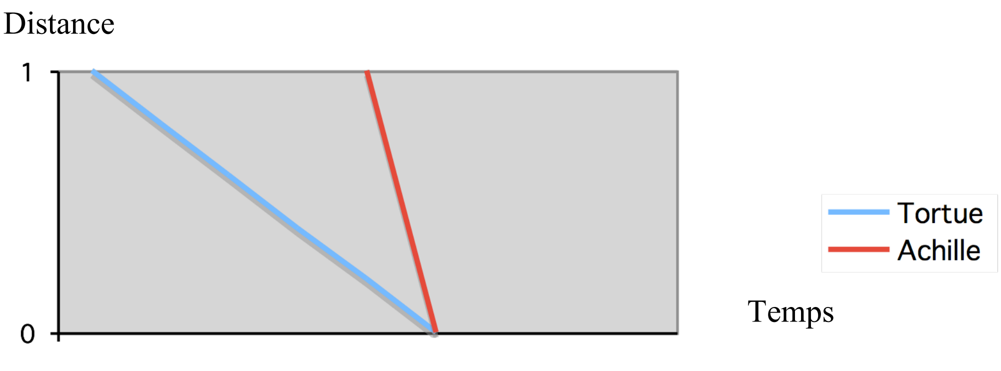
1/4
A——T

1/8
A—T

etc. à l'infini...

Le principe c'est qu'il reste toujours quelque chose entre Achille et la tortue : s'il reste 1 millimètre, alors il fera ½ millimètre, et ensuite ¼ de millimètre... Dans les calculs, on peut aller très loin, mais il restera toujours ce qu'on appelle en mathématique un *epsilon :* une quantité non nulle aussi petite que l'on veut.
Mais alors, pourquoi ce cheminement, ce raisonnement, est-il apparu comme un paradoxe ? Où est-ce que ça ne va pas ? Et pourquoi Lacan y fait-il référence ? On le verra par exemple dans la première leçon de « *Encore » :* le cheminement, sur ce mode-là ne permet pas à Achille de rattraper la tortue, et c'est le raisonnement de Zénon.

Maintenant, dessinons-le aujourd'hui – comme on aurait pu le faire à l'époque d'ailleurs, toujours avec 2 axes. Sur l'axe horizontal, j'indique le temps et non les étapes et sur l'axe vertical la distance qui reste à parcourir : la tortue avance, la distance qui reste diminue, et elle va y arriver, là où elle va. Achille, lui, part un peu plus tard, mais il va plus vite : ils vont donc se rencontrer...



Pourquoi y a-t-il paradoxe ?

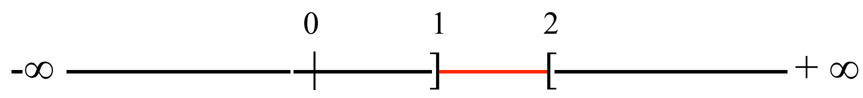
Je vous propose cette interprétation : dans le premier graphique, avec la courbe bleue unique, il s'agit de quelque chose qui est dans l'ordre du signifiant, c'est-à-dire qu'on avance étape par étape et qu'à chaque étape, je répète la même phrase « je vais parcourir la moitié de chemin qui reste à parcourir ». C'est la même phrase, et elle est toujours aussi longue à dire : et elle ne rend pas compte d'une chose, c'est que ces étapes, au fur et à mesure que je me rapproche – si je vais à vitesse constante – sont de plus en plus petites. Donc chaque étape va durer de moins en moins longtemps : elles vont prendre moitié moins de temps à chaque fois. Autrement dit, les points écrits sur l'axe horizontal de ce schéma 1, les points 1, 2, 3, 10, n, etc. ont été répartis de manière uniforme pour que j'ai le temps d'articuler ma phrase à chaque fois « je vais parcourir la moitié de chemin qui reste à parcourir ». C'est quelque chose qui est bien articulé à ce qui est dit, et non à la représentation physique du phénomène, telle qu'elle est illustrée ci-dessus par le schéma avec les 2 lignes, bleue et rouge.
En d'autres termes : ce n'est pas dans le réel qu'il y a un paradoxe de la rencontre d'Achille et de la tortue – c'est dans le dire. Ce qui n'est pas rien... surtout quand de rencontre, il ne peut y avoir que dans le dire.
Donc, ce que j'ai fait à partir de cette démarche, c'est d'introduire la notion d'infini et de voir que dès que l'infini est évoqué, des questions nouvelles apparaissent, et ces questions-là, pour les traiter correctement – c'est-à-dire pas imaginairement – l'appui de la topologie va être très utile.

Donc ici, dans cette histoire de tortue, au niveau de l'infini, on a des effets d'imaginaire puisqu'on se trouve devant une distance infiniment petite et qui est parcourue en un temps infiniment petit. Qu'est-ce que ça donne ? Il se trouve que ça donne ici quelque chose de fini, mais on peut être amené à multiplier de l'infini par de l'infini – de l'infiniment grand par de l'infiniment petit – et quel en est le résultat ? Eh bien ce sont des choses qui font appel à des notions d'infini, qu'il nous faut articuler avec des écritures.

IV Une topologie de l'infini.

Quelques mots sur ce qui serait une topologie de l'infini.
La topologie de l'infini la plus simple, ce serait celle de la droite : une distance qui va de quelque chose de très petit à quelque chose de très grand, de très éloigné d'un côté à quelque chose de très éloigné de l'autre côté.

α Intervalle ouvert
Sur cette droite, la topologie la plus courante – et donc il s'agit bien d'une définition supplémentaire : c'est quelque chose qui n'est pas sur la droite, ce sont simplement des nombres qui sont classés – la topologie la plus courante c'est celle de constituer des morceaux de cette droite qu'on écrit comme ceci,] entre crochets [car on en exclut les extrémités.



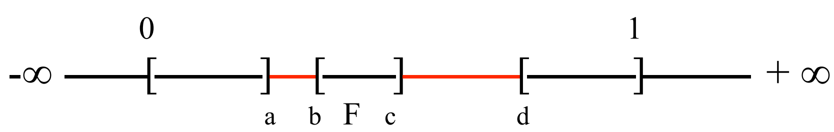
C’est par exemple tous les points qui vont être compris entre 1 et 2 – sauf 1 et 2. Et donc c’est la même chose qu’Achille avec la tortue : de 1 je peux me rapprocher le plus que je peux, et me trouver dans cet intervalle matérialisé en rouge, toujours dans cet intervalle – jamais sur le 1. J’aurai toujours encore la moitié de quelque distance, de quelque epsilon, à parcourir pour y arriver : je serai toujours dans cet intervalle. Cet intervalle, on l’appelle un **ouvert** parce que les extrémités n’appartiennent pas à cet intervalle.
Alors vous voyez que de l’infini on en a à chaque bout de la droite, mais qu’on en a aussi à l’intérieur de la droite.

β Intervalle fermé

On va travailler maintenant sur une partie de cette droite, sur tous les points qui sont compris entre 0 et 1, et vous voyez qu’ici je mets les intervalles avec les crochets vers l’intérieur : c’est ce qu’on appelle un intervalle **fermé.**

γ Intervalles ouverts et fermés

Et à l’intérieur de ce segment fermé [0,1] on va considérer un ensemble de segments ouverts, c’est-à-dire des segments qui n’auront pas l’extrémité : ce sont ceux qui sont matérialisés en rouge sur la droite ci-dessous :]a,b[et]c,d[. Ils pourront aller le plus près possible des extrémités, mais sans aller jamais sur l’extrémité.



Le **fermé** en topologie c’est le complémentaire d’un **ouvert**. Et bien sûr nous avons le contraire : le complémentaire d’un ouvert, c’est un fermé.
Sur la droite, le fermé F, c’est-à-dire [b,c] a pour complémentaire l’ouvert O c’est-à-dire]a,d[représenté en rouge sur la droite, et O est le complémentaire de F.
Et les 3 propriétés qu’on a écrites tout à l’heure, on peut très bien les écrire avec des *fermés*.

Au passage, notez que le complémentaire de l’ensemble E est l’ensemble vide ∅.
Et que le complémentaire de l’ensemble vide ∅ est l’ensemble E.
Donc, E et ∅ sont à la fois ouverts et fermés.
Car, dans E, le complémentaire de E c’est l’ensemble vide ∅.
Le complémentaire de l’ensemble vide ∅ dans E, c’est E.

Si E est un *ouvert* – et E est ouvert, nous l'avons vu – son complémentaire est un *fermé,* donc l'ensemble vide ∅ est fermé. C'est une conséquence directe de l'écriture : vous avez des ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés.

Donc l'ensemble vide est à la fois ouvert et fermé, et de la même manière E est à la fois ouvert et fermé.

Tous ces ouverts, vous voyez qu'il sont en infinité entre 0 et 1 puisqu'il y a une infinité de façons de placer le bord gauche], et une infinité de façons de placer le bord droit [. Donc une double infinité, ce qui reste une infinité du même ordre…

- *Infinité du bord droit, infinité du bord gauche ? Je ne comprends pas...*

L'ouvert]a,d[qui est représenté en rouge sur le schéma ci-dessus entre [0 et 1], j'aurais pu le faire commencer de n'importe quel point : en fait il y a une infinité d'endroits où j'aurais pu le faire commencer. Et il y a une infinité d'endroit où je peux le faire terminer... Car entre 0 et 1, il y a combien de points ?

- *Une infinité.*
- *On revient à Achille !*

Eh oui : entre [0 et 1] il y a 1/2, il y a 1/4, 1/8 etc. Je peux même écrire qu'il y a $1/n$ et comme n peut aller jusqu'à ∞, je vais avoir une infinité de points en m'approchant du 0. Et le même raisonnement vaut quand je m'approche du 1, avec mise en place d'une infinité de points. Je peux d'ailleurs tenir ce raisonnement en n'importe quel point de ce segment : j'ai donc vraiment une infinité de points.
Cette infinité est même plus infinie que le nombre n : c'est ce que Cantor a mis en place avec sa diagonale. C'est-à-dire que l'infinité de points qu'il y a entre 0 et 1 est plus dense, plus importante, d'un autre ordre, que l'infinité qui va de 0 à ∞ quand on compte 1,2,3, etc. C'est une infinité qui est plus dense que l'infinité du comptable.
Ces espaces ouverts peuvent être dans une infinité de positionnements sur cette droite, et on peut en avoir une infinité.

Pourquoi parlons-nous de ça ? Parce que Lacan va en déduire, va l'utiliser pour écrire l'impossibilité du rapport sexuel.
Pour l'instant restons-en sur le fait qu'entre [0 et 1] on peut avoir une infinité d'espaces ouverts – qui peuvent se recouvrir partiellement, etc.
On a aussi une infinité de fermés, on pourrait construire la même chose par les complémentaires.

- *Lacan parle-t-il de l'impossibilité du rapport sexuel tant à partir des fermés qu'à partir des ouverts ?*

Il prend ça à partir des ouverts puisque la topologie qu'on a construite est basée sur les ouverts. On pourrait faire la même chose en partant des complémentaires.

Mais les ouverts c'est peut-être plus intéressant : on verra que c'est le côté féminin.

- *Dans les 2 cas il n'y a pas de rapport ? Il n'y a pas un point où les 2 se rejoignent ? Il y a une limite dans les fermés...*

Il y a une limite dans les fermés, mais cette limite va être un point. Est-ce que ce point fait partie de la famille des fermés ? Il faudrait à ce moment-là aussi considérer que dans notre liste on a des fermés qui sont réduits à l'un des points, mais ce n'est pas le cheminement qu'on a suivi puisqu'on a travaillé sur des ouverts.

Restons en là pour aujourd'hui…

<Transcription de Lucien Verchezer>
Relue par Henri Cesbron-Lavau