Métalangage

(quelques notes sur les théorèmes de Tarski et Gödel)

S. Dugowson

26 juillet 2011

Je ne suis pas logicien A l'occasion de la lecture des *Lieux du sujet* de Lavendhomme [1] — très précisément le chapitre 9, p. 195 à 203 —je commence à comprendre un peu mieux le premier théorème d'incomplétude de Gödel, qui m'avait toujours laissé dubitatif.

Il faut dire que les questions de fondements ne m'ont jamais attiré en tant que telles, non plus d'ailleurs que la logique, où pour moi se mélangent considérations triviales — les logiciens semblent ne pas se lasser d'écrire qu'on considérera l'énoncé $P \wedge Q$ vrai chaque fois que P et Q seront vrais — et énoncés obscurs remplis de termes polysémiques, tels *syntaxe*, *sémantique*, *récursivité*, *logique du premier ordre*, etc...

Lavendhomme a la bonne idée, avant d'aborder le premier théorème d'incomplétude de Gödel, de commencer par expliquer le théorème de Tarski.

Distinguer le vrai du démontrable ? Et peut-être, en effet, faut-il commencer par là : distinguer autant que possible les notions profondément liées de vérité et de démontrabilité ? En effet, au quotidien, l'un des principaux objectifs du mathématicien est de faire coïncider les deux notions : que ce qu'il tient pour vrai soit démontrable, puisque seul ce qui aura été démontré sera tenu pour vrai par la communauté. Distinguer vérité et démontrabilité, donc, non pour les opposer, mais parce que cette distinction est au fond celle de la sémantique et de la syntaxe. Comme, en logique mathématique, ces termes ont des significations apparentées mais tout de même assez différentes du sens linguistique ordinaire, il faudrait commencer par là.

Stratégie syntaxique Alors voici ce que j'ai compris, ou cru comprendre (le lecteur logicien ne manquera pas de corriger mes erreurs) : pour répondre au manque de rigueur, aux ambiguïtés et finalement aux paradoxes, une stratégie a été privilégiée, dont Hilbert aura été le chef de file, et que l'on pourrait appeler la stratégie syntaxique. Parmi les notions syntaxiques fondamentales, on trouve en particulier celles de *théorie*, de *langage*, d'*expression*, de *formules*, d'*axiome*, de *déduction*, de *théorème*. En résumé, il s'agit de suites de symboles (c'est-à-dire des signes, des caractères typographiques), astreints à vérifier certaines contraintes pour être considérées comme bien formées et constituer ainsi des expressions correctes, des formules, des démonstrations. Il s'agit donc d'un jeu formel sur ces signes, du genre qui plaisent aux ordinateurs et autres automates, même s'ils n'existaient pas encore du temps de Hilbert. Le but n'était pas nécessairement de transformer les mathématiciens en automates, mais plutôt de se donner une référence solide pour ancrer la pratique du mathématicien. En quelque sorte équilibrer la chaude sémantique (au sens ordinaire du sens), pleine d'intuitions et d'implicites, par une froide syntaxe (au sens de règles de formation non seulement des expressions correctes du langage, mais aussi des démonstrations correctes par lesquelles, partant des axiomes de la théorie considérée, on arrive aux théorèmes de ladite théorie), une telle formalisation de la théorie pouvant fort bien rester un idéal théorique rarement mis en pratique.

Or donc, on a voulu naturellement faire entrer le maximum de mathématiques réelles — j'entends par là ce que font les mathématiciens : leurs idées, leurs raisonnements, leurs concepts, leurs écrits, etc... — dans ce plan formel de la syntaxe. Et s'il y a un concept mathématique fondamental, c'est bien celui de vérité. Faire entrer la notion de vérité dans la syntaxe d'une théorie formelle, cela signifie admettre comme formules de la théorie non seulement les formules P construites avec des symboles comme $=$, 3, $+$, $\forall$, x, et, ou, etc... mais aussi avec le symbole V (ou $vrai$, ou T). Ainsi, à toute formule P, on pourra associer une formule du genre $v(\ll\ P\ \gg) = V$, soit en substance : la valeur de vérité v de la proposition désignée par $\ll\ P\ \gg$ est vraie, autrement dit : P est vraie. Si l'opération d'introduction de la notion de vérité à l'intérieur de la syntaxe devait réussir, il y aurait donc deux énoncés différents mais équivalents : « P »et « P est vraie », mais aussi, par exemple : « « « P est vrai »est vrai »est vrai », ce genre de choses.

Entre guillemets A noter l'usage par Lavendhomme, repris de Tarski, des guillemets : si P est une proposition, $\ll\ P\ \gg$ n'est plus une proposition mais un objet (disons un groupe nominal ou un nombre) pointant vers la proposition en question mais susceptible d'entrer à son tour comme terme dans d'autres expressions — c'est donc une forme de transtypage —, comme dans l'exemple :

> « la neige est blanche » est vraie.

Cet usage des ≪ ≫ correspond au codage gödelien, mais est plus parlant.

Une explosion Bref, la découverte de Tarski est que l'opération vérité syntaxique échoue : lorsqu'on veut faire entrer la notion classique (binaire) de vérité dans le plan de la formalisation syntaxique, on y fait entrer par la même occasion les menteurs et leur paradoxe. Il se produit alors une explosion qui éjecte la vérité hors de ce plan. Cette extériorité est précisément celle de la sémantique : la vérité binaire classique peut se retrouver, mais dans une *interprétation* des suites syntaxiques de signes par des entités mathématiques, objets usuels de l'intuition du mathématicien constituant alors ce que Tarsky appelle un *modèle* de la théorie. Cette mise en place d'une interprétation dans un modèle constitue la sémantique. L'extériorité du modèle par rapport au langage formel de la syntaxe est signalée par le terme *métalangage.*

Reste à savoir si l'explosion du plan syntaxique sous la pression d'exigences trop fortes nous ramène à la sémantique chaude, avec ses intuitions, ses implicites, son manque de rigueur et peut-être ses paradoxes, ou bien si le métalangage ne pourrait pas être à son tour récupéré en termes syntaxiques, avec une sorte de typage des niveaux de langage.

Théorème d'incomplétude de Gödel Maintenant, ce qui me gênait dans le premier théorème d'incomplétude de Gödel, ce n'était pas l'existence d'énoncés indécidables, c'est-à-dire non prouvables non plus que leurs négations, ça c'est pas du tout difficile à comprendre parce que si les axiomes ont des conséquences, ça semble assez évidents que les conséquences lointaines ne couvriront pas tout le champ des énoncés possibles. On pourrait facilement faire un petit dessin animé montrant comme des ruisseaux ces conséquences, un tissus de ruisseaux en développement mais finissant par laisser apparaître des zones non recouvertes. Non, ce qui me gênait c'était que la proposition indécidable construite par Gödel, affirmant en un sens sa propre indémontrabilité, soit considérée par beaucoup d'auteurs comme à la fois vraie et indémontrable. En effet, d'une part, si elle est indémontrable, qu'est-ce qui autorise à la considérer comme vraie ? Là, la réponse est généralement de dire : elle est indémontrable dans le système syntaxique considéré initialement, mais elle n'est plus indémontrable dans le système plus vaste obtenu en ajoutant la dimension sémantique apportée par le modèle standard de l'arithmétique, c'est-à-dire les entiers tels que tout le monde les connaît. Cette dernière façon de parler ayant un fort parfum de sémantique chaude, j'ai dans ces cas là tendance à me dire : tout ça pour ça ? J'avoue ne pas très bien savoir ce que sont les entiers tels que tout le monde les connaît. Ce qui est clair, c'est que si cet objet existe, il n'est pas finiment axiomatisable. En fait, ce que je commence à comprendre, notamment grâce à l'article de Wikipedia sur le sujet, c'est qu'en tant que proposition indécidable, l'énoncé de Gödel peut effectivement être reçu comme vrai ou comme faux, au choix, dans un système formel plus large, mais que ceux qui le tiennent pour vrai le font au nom du modèle standard, considéré comme un objet mathématique bien défini malgré l'impossibilité de l'axiomatiser par un nombre fini d'axiomes, tandis qu'il est possible de construire d'autres modèles, non standards [1] donc (comme dans l'analyse non standard de Robinson [2]), dans lesquels l'interprétation de l'énoncé de Gödel en terme de vérité sera qu'il est faux.

Ce que je n'ai toujours pas compris (à l'aide, les logiciens !), c'est ce que cela signifie vraiment, que cet énoncé soit faux : puisqu'il énonce sa propre indémontrabilité, s'il est faux dans un tel modèle non standard, est-ce à dire que dans une syntaxe correspondante il doit être considéré comme démontrable, auquel cas il serait vrai. La solution à ce problème ne serait-elle pas que dans la nouvelle syntaxe en question l'énoncé considéré ne signifie plus sa propre indémontrabilité, mais autre chose ?

Le « il n'y a pas de métalangage » de Lacan Dans certaines circonstances, celles créées par de fortes exigences quant aux langages formels employés comme références mathématiques, l'explosion causée par une auto-référence contradictoire fait surgir le métalangage et la sémantique hors de la syntaxe qui sans cela aurait pu longtemps continuer à tourner en boucles automatiques. Ces conditions ne sont pas remplies par la langue ordinaire mais il n'en demeure pas moins qu'une certaine extériorité à nos constructions mentales se révèle vitale : sans elle, ne tournerions-nous pas en rond, sans fin, sans jamais rencontrer l'autre, sans pouvoir respirer l'air rafraîchissant de la nouveauté absolue à jamais inscrite au coeur de la présence du présent ? Donc, pour ma part, je reçois la formule « il n'y a pas de métalangage » non comme l'affirmation statique de l'absence en notre intériorité de cette extériorité vitale, mais plutôt comme le fait que le métalangage, recréé à chaque instant par l'explosion perpétuelle de l'auto-référence de notre présence, se voit sans cesse rattrapé — participe passé — par lalangue : l'absence de métalangage n'est pas une donnée absolue mais l'expression d'un manque dynamique ouvrant non sur le néant mais sur le vide grand ouvert d'un espace de création du sens, à chaque instant.

1. Ou non standard, au choix, voir `http://www.langue-fr.net/spip.php?article248`.
2. Voir d'ailleurs à ce sujet les dernières pages du chapitre 9 des *Lieux du sujet*

Pour conclure Page 204, Lavendhomme conclut sa présentation des théorèmes d'incomplètude de Gödel par cette phrase :

> C'est au cœur même de cette logique que se prouve et s'éprouve que la certitude ne peut jamais être totale.

Paradoxalement, pour Lavendhomme, il semble bien que cette impossibilité de la certitude soit certaine. Ce n'est pas mon cas.

Références

[1] R. Lavendhomme. *Lieux du sujet : psychanalyse et mathématique*. Ed. du Seuil, 2001.