De quelques modalités de l'inaccessible du nombre

Introduction

En novembre 1973, c'est-à-dire à l'automne suivant le séminaire « Encore », Lacan participe au congrès de l'Ecole Freudienne de Paris à la Grande Motte. Dans son exposé, il reprend la distinction à accentuer du signe au signifiant, en fondant cette distinction sur une observation qui, me semble-t-il nous permet de mieux comprendre l'intérêt de Lacan pour la théorie des nombres.

« L'analyste, nous dit-il, *se définit de cette expérience qui lui permet de distinguer le signe du signe du sens du sens. Les formations de l'inconscient – comme je les ai appelées il y a bien longtemps – démontrent leur structure d'être déchiffrables. C'est de là que Freud distingue la spécificité du groupe rêve, lapsus, mot d'esprit, soit du mode, le même dont il opère avec eux : il les déchiffre.*

Sans doute, poursuit-il, *Freud s'arrête-t-il quand il a découvert le sens sexuel, et est-ce là que pour lui que s'arrête la structure ...*

Et plus loin :

Le travail est reconnu à l'inconscient du chiffrage. L'inconscient tout seul fait ce travail du chiffrage ... il ne pense ni ne calcule, ni ne juge non plus : il fait simplement le travail…Le chiffre d'un côté fonde l'ordre du signe, et d'autre part il se trouve que le chiffre, ça sert à écrire les nombres. »

C'est en ce point que, mentionnant sa rencontre manquée avec le mathématicien Émile Borel, il signale qu' *« i l y a des nombres inaccessibles »*, et que « *cela commence bien plus tôt qu'on ne croit »*. Ce n'est que tout récemment que j'ai réalisé que le dernier livre d'Émile Borel publié en 1952 s'intitule précisément « *Les nombres inaccessibles* », et que ce livre contient un certain nombre d'indications qui ne sont pas sans rapport avec cet autre sorte d' inaccessible qu'est l'inconscient.

C'est pour cette raison que je vous propose dans ce qui suit quelques aperçus du contenu de ce livre, qui m'ont paru congruents avec notre interrogation sur « le refoulement aujourd'hui ».

Quand est-ce qu'un nombre est spécifié?

Une première question, en quelque sorte préalable, est de savoir quand nous pouvons considérer qu'un nombre est bien spécifié. Borel souligne que pour cela, il faut que «*deux mathématiciens, s'ils en parlent entre eux, soient certains qu'ils parlent du même nombre*». Il donne de nombreux exemples de nombres parfaitement définis, bien qu'impossibles à écrire, soit en raison du très grand nombre de chiffres qu'ils comprennent, soit en raison du caractère imprévisible de leurs décimales.[1]

Cela ne suffit cependant pas à Borel pour qu'un nombre puisse être considéré comme un objet mathématique à part entière. En effet, un « *véritable être mathématique* » au sens de Borel doit *« pour être intéressant aux yeux des mathématiciens, avoir au moins deux propriétés (en y comprenant celle*

1 Par exemple : On pose $n=2^{2\,000\,000\,000}+3^{3\,0000\,000\,000}+5^{5\,000\,000\,000}$, puis $m = n^n + n^{2n} + n^{3n}$ et on appelle m' le nombre premier dont le rang est m lorsque tous les nombres premiers sont rangés par ordre de grandeur croissante. Un nombre entier comme m', bien que parfaitement défini, est sans intérêt, car on ne sait pas actuellement lui attribuer une quelconque propriété.

au moyen de laquelle il a été défini) ». Or, pour la plupart des nombres que nous sommes capables de spécifier à l'aide d'algorithmes plus ou moins sophistiqués, nous sommes incapables de trouver une seconde propriété.

Il me paraît intéressant d'insister sur cette première nécessité, posée par Borel pour les nombres, mais qu'on retrouve au niveau de toute constitution d'une science, et aussi au niveau de la constitution du monde du sujet :

- d'une part, il faut être au moins deux, le solipsisme mathématique n'existe pas.
- d'autre part, ce que l'on sélectionne comme « objet intéressant » l'est en raison du fait que cela possède au minimum deux propriété : l'une qui définit cet objet en tant que tel (« y a d'l'un »), l'autre qui rend cet objet intéressant en tant qu'il est pourvu d'un attribut.

Dans la conférence de J.P.Hiltenbrand du 10 janvier 2005, celui ci nous signale d'entrée le rôle du refoulement dans la sélection des expériences vécues par le sujet :

« l*e refoulement est un processus nécessaire, vital, car d'un côté il est impossible de garder en mémoire et de façon actualisée toutes les expériences de la vie sinon à accumuler de façon massive une multitude de souvenirs au point d'immobiliser les processus psychiques. De l'autre côté le refoulement est étroitement lié au principe de plaisir et de déplaisir, lequel principe, là encore, pour des raisons vitales et physiologiques doit être bridé.*

De ce fait, si le refoulement conditionne la mise en place d'un inconscient dans la perspective du principe de plaisir, eh bien il opère également comme fonction de sélection. Premier point »

Remarquons au passage la ressemblance de ce qui est mis ici en regard : une fonction de choix, d'élection, d'une part, et d'autre part le pilotage de cette fonction par un principe : l'intérêt (la deuxième propriété) pour Borel, le principe de plaisir chez Freud. A noter cependant que si la spécification d'un nombre opère « *per via di porre* », le refoulement, lui opère « *per via di levare* »[2]. La où la spécification d'un nombre se donne comme une positivation (une écriture, un algorithme, un nombre fini d'opérations de calcul, ...) d'un nombre, le refoulement opère au contraire par le retranchement de ce qui est jugé inintéressant.

Les nombres relativement inaccessibles

Pour Borel, il existe pour les nombres deux types bien distincts d'inaccessibilité.

La première, qu'il appelle inaccessibilité relative, est illustrée par la suite des nombres entiers. Celle-ci, en effet, tout en semblant à portée de main, par le biais de la répétition, comporte évidemment des nombres, tels que le nombre *m'* ci-dessus, dont Borel écrit : « *De tels nombres sont inaccessibles, relativement non seulement à l'espèce humaine, mais à tous les êtres pensants que l'on pourrait concevoir dans notre univers, dont les dimensions sont minuscules par rapport à de tels nombres (en prenant comme unités les plus petites dimensions imaginables)* ». Ces nombres, Borel les nomme néanmoins « *relativement accessibles* » en ce sens que nous sommes capables de les désigner par un procédé, sans pouvoir cependant en jouir pleinement, en en écrivant tous les chiffres décimaux par exemple.

A ces nombres relativement accessibles, Borel va oppose les nombres relativement inaccessibles qui se déduisent simplement de la définition ci-dessus : le nombre de procédés que nous

2 « ... La peinture, [dit Vinci] travaille *per via di porre* car elle applique une substance — des parcelles de couleur — sur une toile blanche. La sculpture, elle, procède *per via di levare* en enlevant à la pierre brute tout ce qui recouvre la surface de la statue qu'elle contient. »

Sigmund Freud, La technique psychanalytique, Paris, PUF, 1953 pouvons imaginer, même en cumulant ces procédés sur un nombre très grand de générations d'êtres pensants, reste nécessairement fini, et donc infime devant la suite illimitée des nombres entiers. Il en tire logiquement que :

« Nous devons donc admettre que, s'il ne nous est pas possible de fixer la borne finie qui ne sera pas franchie, dans la suite illimitée des entiers, par l'ensemble fini de tous les hommes passés et futurs, cette borne existe cependant et les nombres qui la dépassent sont humainement inaccessibles ... Notre conclusion est qu'il existe des entiers inaccessibles, c'est à dire qui ne seront jamais atteints par aucun homme, mais que, par leur définition même, nous ne les connaissons pas et il nous est impossible d'indiquer la limite à partir de laquelle les entiers sont inaccessibles, puisque cette limite est elle-même inaccessible.[3] *... Nous devons considérer cette inaccessibilité comme relative, puisqu'elle dépend de nos hypothèses sur la durée de l'univers et sur l'activité des hommes.»*

Cette conclusion peut nous paraître plutôt abstraite, tant que nous la considérons comme portant seulement sur la suite des nombres entiers. Mais Borel nous montre à l'aide d'une foule d'exemples que cette propriété - il y a des nombres inaccessibles - concerne tout ensemble dénombrable, et donc pour nous tout ce qui est numérotable. Il me semble que c'est à ce titre que la fonction de l'inaccessible telle que la déploie Borel nous intéresse, comme elle intéressait Lacan en 1973.

Nous sommes en effet parvenus à une époque où il est devenu de notoriété publique - numérique oblige - qu'un très grand nombre d'éléments de notre monde peuvent être ramenés moyennant codage à un nombre. Un texte, un livre, un morceau de musique, une image, sont[4] autant de suites de 1 de 0, c'est à dire en dernière analyse de nombres entiers. Très grand, certes, mais nombres entiers cependant. Ces éléments de notre monde sont donc à ce titre numérotables.

D'autre part nous sommes obligés de supposer – ne serait-ce que parce que nous sommes mortels - que les pensées dont nous sommes capables, les paroles que nous sommes susceptibles d'énoncer, les expériences de la vie en général – celle dont J.PHiltenbrand nous rappelle que le refoulement porte nécessairement sur elles - sont au moins numérotables, et plus probablement finies.

D'où cette étrange conclusion : le refoulement porte sur du numérotable. Il rend inaccessibles certains éléments d'un ensemble d'éléments numérotables.

LES NOMBRES ABSOLUMENT INACCESSIBLES

De ce premier type d'inaccessibilité, Borel va distinguer un second, plus radical, qu'il appelle inaccessibilité absolue. Pour cela, suivant Cantor, il considère cette fois non plus la suite des entiers,

---

3 Je n'ai pu m'empêcher de rapprocher cette formulation de celle de Melman à propos de l'anorexique : « *Elle est addicte de ce qui est au-delà d'une limite qu'elle n'arrive pas à tracer* ». Cette formule, qui peut paraître paradoxale, devient parfaitement recevable si on la rapproche de celle de Borel concernant « *la limite à partir de laquelle les entiers sont inaccessibles* ». Il suffit de prétendre la tenir : « la voici : N », pour qu'elle nous glisse entre les doigts, par un raisonnement très simple : N+1, 2N, $N^{2,}$ etc … sont plus grands que N, qui dès lors n'est pas ce qu'elle prétend être. Cette limite, tout en existant incontestablement, n'est pas inscriptible sans s'évanouir aussitôt : il est impossible d'en jouir, car impossible de l'écrire. Et par définition, ce qui est au-delà est inaccessible. Encore moins question d'en jouir.

4 Bien entendu, j'entends ce « sont » avec toutes les restrictions nécessaires : c'est « sont » en tant qu'on se limite à leur face de pur signe, en tant qu'ils sont donc chiffrables »

mais l'ensemble des réels compris entre 0 et 1[5]. Les Grecs savaient déjà, notamment grâce à leurs connaissances géométriques, que cet ensemble comportait des éléments « incommensurables », c'est à dire ne possédant aucune commune mesure avec ce qui tenait lieu de « un ». C'est cependant Cantor qui, par son fameux raisonnement diagonal, a mis en évidence que l'ensemble des éléments incommensurables présents entre 0 et 1 n'était pas numérotable ! En d'autres termes, l'ensemble des nombres présents entre 0 et 1 est trop dense (ou trop vaste) pour qu'il soit possible même d'en écrire la liste, même en admettant que cette liste puisse être infinie comme la liste des nombres entiers.

Pour reformuler ce résultat en termes plus propres à nous donner des éléments pour notre questionnement sur le refoulement, ce que Borel nous aide à concevoir c'est

- d'une part qu'il existe nécessairement, dans ce qui est de l'ordre du chiffrable, de l'inaccessible, relativement à notre durée de vie, mais aussi du fait de l'absence d'intérêt que nous pouvons avoir pour tel ou tel élément,
- d'autre part qu'il existe par ailleurs du non chiffrable, absolument inaccessible, quel que soit notre détermination à trouver de nouvelles manières de pointer vers ces éléments.

On peut citer à ce propos la métaphore qu'utilise Harthong, un spécialiste moderne de ces questions :

« *Quelques très rares nombres sont visibles, et se détachent d'un fond obscur formé d'une infinité absolument inconcevable de nombres à jamais inassignables. ... Le continuum des nombres réels, tout comme la suite homogène des entiers, est un substrat obscur formé de nombres inassignables, dans lequel brillent des étoiles. Ces astres sont isolés.* »

INACCESSIBILITÉ ET REFOULEMENT

Il n'est évidemment pas question de procéder à une analogie sans précautions entre l'inaccessible mathématique et le refoulé, même si les deux termes portent sur le même type d'éléments, en tant que ces éléments sont « chiffrables. »

En revanche, mon hypothèse est que l'examen de ce qui sépare ces deux termes peut éventuellement nous permettre d'avancer dans la question du refoulement.

Ainsi, comme nous l'avons fait remarquer, le refoulement secondaire opère sur ce qui était déjà là. Il opère parce que deux motions deviennent inconciliables. A la contradiction (qui permet en mathématiques de décréter la non-existence d'un élément) vient se substituer la non-conciliabilité, qui va soustraire un terme, mais sans qu'il devienne à proprement parler inaccessible. Nous savons bien, au contraire, que le refoulé fait retour, et même qu'il fait retour moyennant un certain chiffrage. Comme le rappelle Lacan, l'inconscient fait le travail : ce qui a été rendu inaccessible redevient, moyennant chiffrage, accessible.

En revanche la proposition de Freud selon laquelle « *Nous sommes donc fondés à admettre un refoulement originaire, une première phase du refoulement qui consiste en ceci que le représentant psychique (Vorstellungsrepräsantanz) de la pulsion se voit refuser la prise en charge dans le conscient, avec lui se produit une fixation, le représentant subsiste, à partir de là, de façon inaltérable et la pulsion demeure liée à lui.* » provient d'une pure déduction logique. En aucun cas le représentant refoulé originairement ne peut être déchiffré ou exhibé. A ce titre, son statut d'absolument inaccessible peut à mon sens être éclairé par ce que dit Borel des nombres absolument inaccessibles.

5 Le choix ce l'intervalle [0,1] est traditionnel, mais parfaitement contingent. Tout intervalle fermé [a,b] peut faire l'affaire.